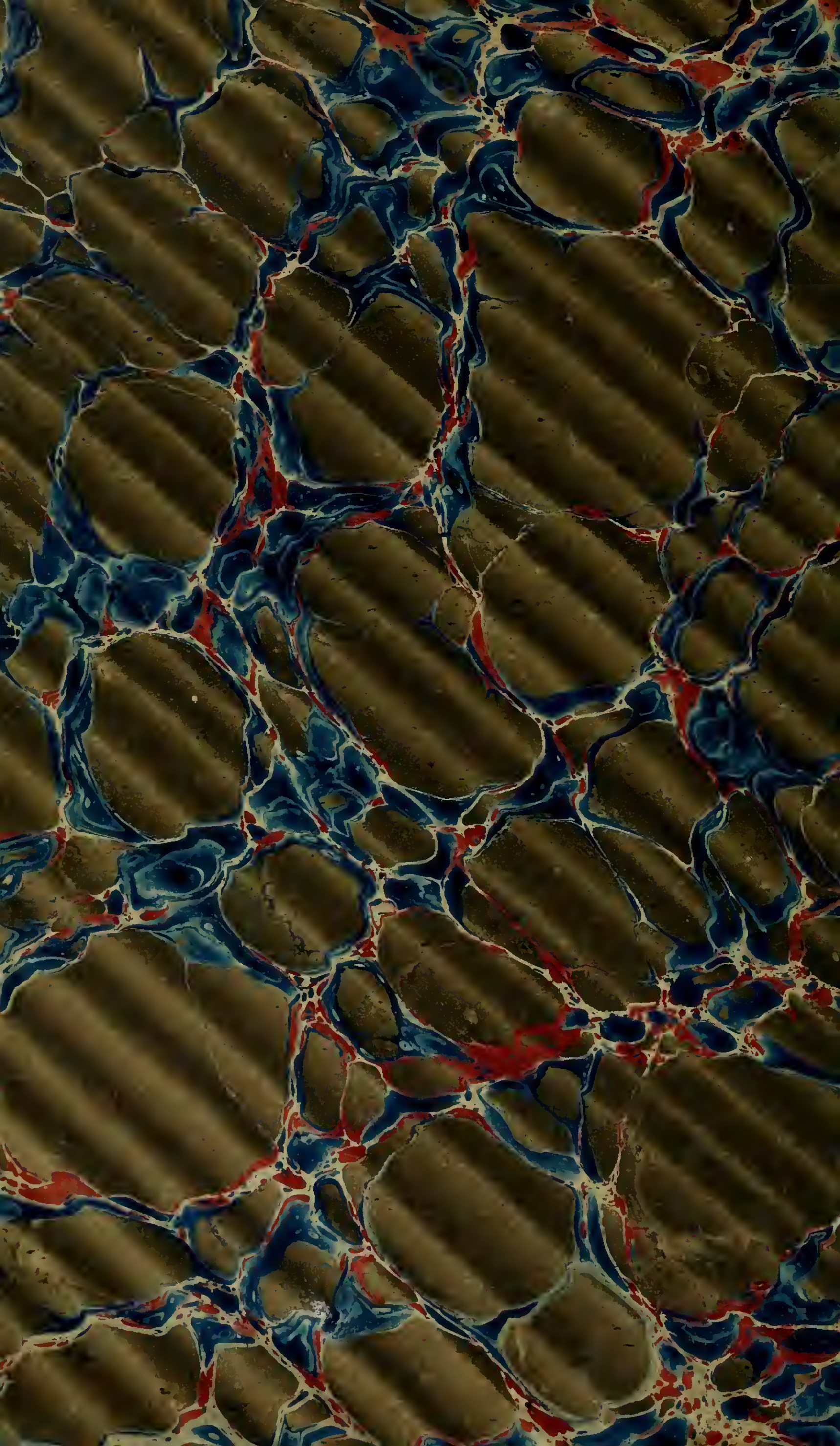
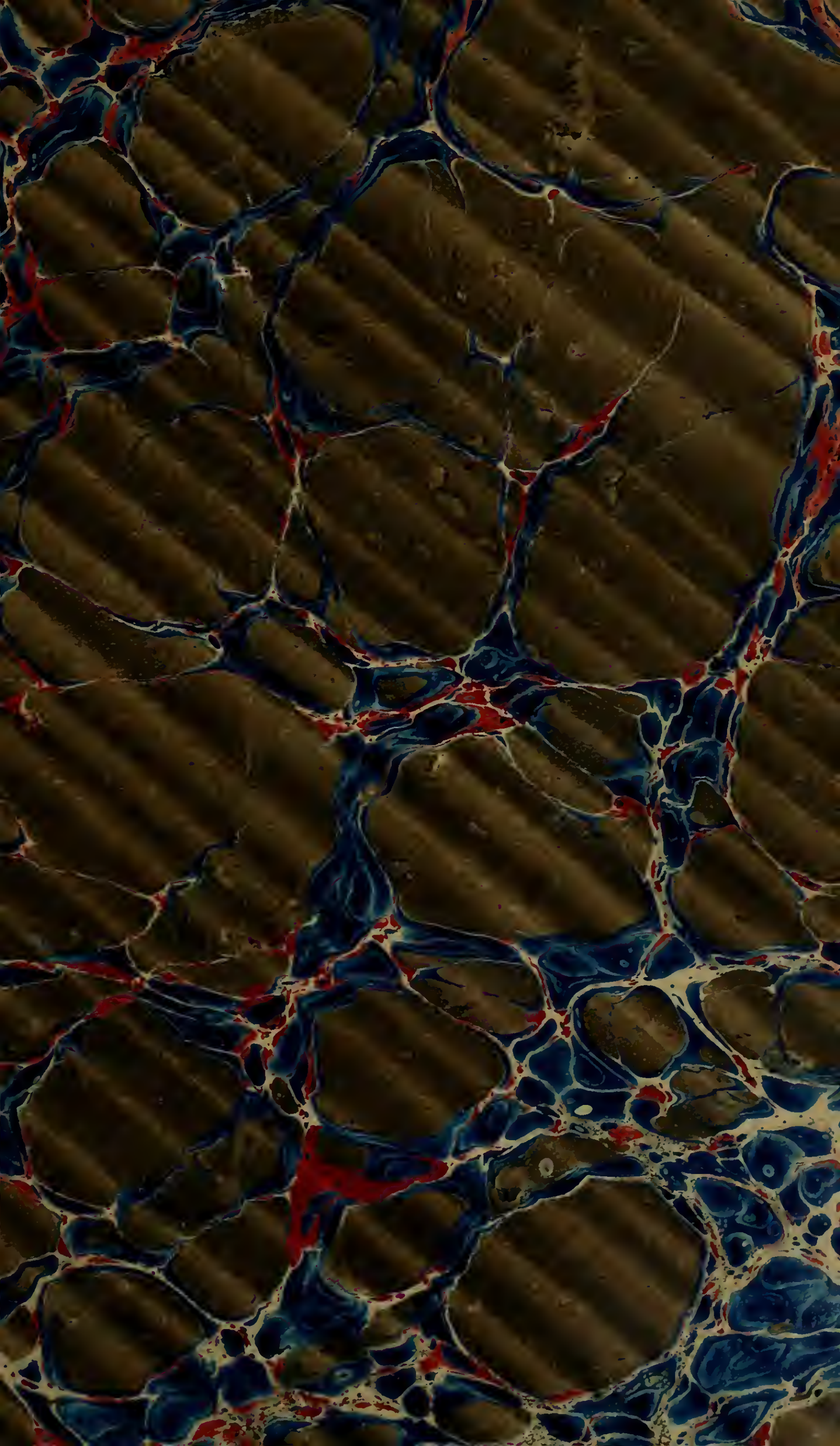

UNIV. OF
TORONTO
LIBRARY





JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

ÉLÉMENTAIRES

A L'USAGE

DE TOUS LES CANDIDATS AUX ÉCOLES DU GOUVERNEMENT
ET DES ASPIRANTS AU BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

PUBLIÉ SOUS LA DIRECTION

DE MM.

DE LONGCHAMPS
Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne.

Lucien LÉVY
Agrégé des sciences mathématiques, Directeur des études à l'École préparatoire de Sainte-Barbe.

3e SÉRIE

TOME TROISIÈME

Année 1889.



PARIS
LIBRAIRIE CH. DELAGRAVE
15, RUE SOUFFLOT, 15

1889

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

ÉLÉMENTAIRES

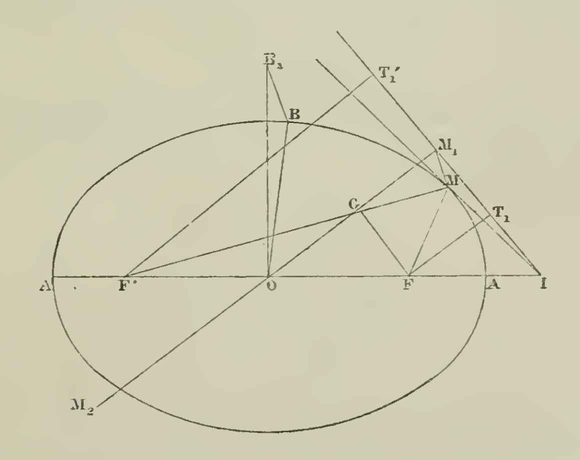
UNE DÉMONSTRATION

DE LA PROPRIÉTÉ FONDAMENTALE DE LA TANGENTE A L'ELLIPSE

Par M. **E. Lemoine**.

Je lis, dans le programme d'Agrégation des sciences Mathématiques, *concours de 1889 :*

« Démontrer qu'une ellipse quelconque peut être considérée



comme la projection orthogonale d'un cercle. Déduire, de là, les principales propriétés de l'ellipse. »

La propriété suivante, l'une des plus importantes, n'est, *je crois*, jamais démontrée directement avec le point de départ indiqué par le programme.

Dans toute ellipse, la tangente en un point M *fait des angles égaux avec les rayons vecteurs* MF, MF'; F *et* F' *étant les foyers.*

Voici une démonstration fort simple :

Soit AA' le grand axe de l'ellipse diamètre du cercle dont l'ellipse est la projection, O le centre de l'ellipse; B, une des extrémités du petit axe; B étant la projection de B_1 point du cercle; M, un point de l'ellipse, projection de M_1 ; soit I le point où la tangente au cercle en M_1 coupe AA' ; MI est la tangente en M à l'ellipse.

Cela posé, soit M_2 le point du cercle, diamétralement opposé à M_1. Si F et F' sont les foyers de l'ellipse, on sait que l'on a $BB_1 = OF = OF'$; on sait aussi, par la démonstration géométrique directe et devenue classique, que M. Courcelles a donnée de cette proposition : *la projection orthogonale d'un cercle sur un plan est une ellipse*, en établissant que

$$MF + MF' = M_1M_2;$$

on sait aussi, dis-je, que, si l'on abaisse, de F, une perpendiculaire FG sur M_1M_2, on a

$$MF = M_1G,$$
$$MF' = M_2G.$$

Soient T_1 et T'_1 les pieds des perpendiculaires abaissées respectivement de F et de F' sur IM_1. Les triangles semblables FT_1I, $F'T'_1I$ donnent

$$\frac{FT_1}{F'T'_1} = \frac{FI}{F'I}.$$

Mais $$FT_1 = M_1G = MF.$$

De même, $$F'T'_1 = M_2G = MF';$$

donc $$\frac{MF}{MF'} = \frac{FI}{F'I};$$

ce qui prouve que, dans le triangle F'MF, la tangente MI est la bissectrice de l'angle extérieur formé par les côtés MF, MF'. C. Q. F. D.

ESSAI
SUR LA
GÉOMÉTRIE DE LA RÈGLE ET DE L'ÉQUERRE
(SECONDE PARTIE)

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite*, voir p. 271.)

106. Le bombardement de la passe. — Soient, sur le terrain, deux points remarquables O, O′, inaccessibles et très éloignés; on voudrait régler le tir de façon à faire tomber les projectiles au milieu de OO′ (*). Cette question, à un autre point de vue, nous a déjà occupé (*Seconde partie*, § 68); mais nous nous étions réservé de l'examiner de nouveau, dans le chapitre actuel.

Deux cas, au point de vue pratique. doivent être distingués dans le présent problème; suivant que OO′ pénètre, ou ne pénètre pas, dans la région accessible.

Premier Cas. — Plaçons-nous d'abord dans cette seconde hypothèse. Après avoir effectué les alignements qu'indique la figure 284, nous obtenons un quadrilatère complet; les milieux A, C des diagonales MP, NQ, donnent deux points situés en ligne droite avec le point invisible B; AC représente donc la ligne de visée.

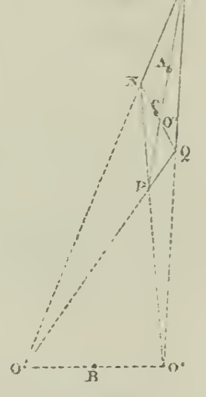


Fig. 284.

Pour obtenir la distance inconnue AB, on observera que les droites O′O, O′P, O′O″, O′Q déterminent, sur ACB, une ponctuelle harmonique; et l'on appliquera la formule indiquée précédemment (*Seconde partie*,

(*) On peut imaginer par exemple que O, O′ représentent deux forts protégeant l'entrée d'un défilé, commençant en B; ou, l'embouchure d'un fleuve; le mouillage d'une rade, etc. Dans cette hypothèse, on peut avoir intérêt à préparer le tir de façon que les projectiles viennent frapper, à un moment donné, non pas les forts eux-mêmes, mais le point qu'ils protègent, point invisible et que nous supposons placé au milieu de OO′.

§ 52). Ces opérations exigeraient, il est vrai, un peu de temps; mais on peut admettre que la guerre des sièges comporte tous les loisirs nécessaires.

Second Cas. — Supposons maintenant que le prolongement de OO′ pénètre dans la région où se trouve l'observateur. Sur ce prolongement, prenons un point A, et traçons, dans la région accessible, deux alignements quelconques Δ, Δ′. On choisira, pour Δ, Δ′, des droites faisant, avec AO, des angles d'autant plus voisins de 90° que la distance OO′ est plus considérable; de cette façon les constructions que nous allons indiquer se feront toujours dans des limites convenables.

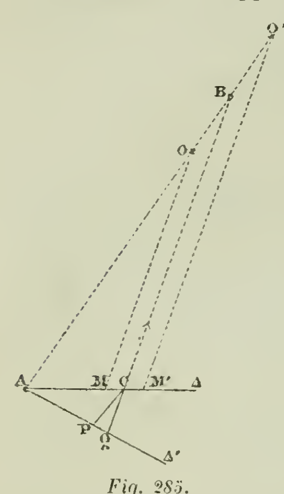


Fig. 285.

Au point M, pris arbitrairement sur Δ, on relève, avec la fausse équerre, l'angle AMO et l'on détermine ensuite, sur Δ, le point M′ d'où l'on voit AO′ sous le même angle. Soit C le milieu de MM′; la ligne de visée est une droite partant de C, et formant avec CA un angle égal à OMA; il a, d'ailleurs, été relevé par la fausse équerre.

Pour avoir la longueur de la ligne de tir, prolongeons la ligne de visée jusqu'à ce qu'elle rencontre Δ′ en P; puis, menons CP, parallèle à AO. Nous avons alors

$$QB = QC.\frac{QA}{QP}.$$

Comme la longueur QC est connue, par un chaînage direct, on pourra, au moyen de cette formule, calculer QB; c'est la distance cherchée, si la batterie doit être installée en Q. Dans le cas où l'on voudrait placer les pièces, en C, on aurait CB, en observant que CB = QB — QC.

107. Remarque. — Il n'y a aucun intérêt à soulever ici, dans cet ordre d'idées, des problèmes plus difficiles que ceux que nous avons examinés dans les paragraphes précédents; car, vraisemblablement, ils ne se présenteront jamais dans les applications.

Pour citer un exemple, relativement simple, des cas auxquels nous faisons allusion, supposons qu'on veuille, d'un point O, tirer sur un point invisible, également éloigné de trois points visibles A, B, C. On tracera, sur le terrain, une figure A′, B′, C′, homothétique de ABC en prenant

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = \frac{1}{100}.$$

Soit ω le point où concourent les perpendiculaires élevées aux milieux des côtés de A′B′C′; Oω est la ligne de visée, et la distance inconnue est égale à 100 Oω.

108. Le tir sur le but mobile. — « Le problème actuel (*) dit Servois, (*loc. cit.* p. 61) que nous reproduirons ici textuellement, est de la plus grande importance pour l'artilleur qui doit toujours connaître la distance du but, s'il ne veut pas consommer inutilement les munitions. Les solutions connues sont suffisantes quand le but est fixe : mais elles paraissent difficilement applicables lorsqu'il est mobile; parce qu'exigeant du temps pour être exécutées, elles ne peuvent être assez souvent répétées pour donner à chaque instant la distance de l'objet en mouvement. On a proposé, il est vrai, pour ce cas, l'usage des deux graphomètres placés aux extrémités d'une base connue ; mais c'est un appareil qu'on ne peut pas toujours avoir et. puis, il faut encore du temps pour conclure, de deux angles pris à la fois, la distance dont on a besoin : cependant il importerait singulièrement qu'on pût estimer, à chaque instant, ou au moins à des intervalles assez rapprochés, la distance d'un objet telle qu'une tête de colonne, un bâtiment en mer, etc., qui s'approche ou s'éloigne : on saurait alors quand il faut commencer et cesser le feu; on me permettra quelques vues sur ce point intéressant; elles ne sont point une digression.

Si l'objet qu'on doit frapper se meut dans le rayon d'un cercle dont la batterie occupe le centre, on pourra se servir avec avantage du *triangle-équerre de Lagrange*, car ayant mesuré d'avance une base perpendiculaire à la direction du mobile, terminée d'une part à la batterie, et fixé l'instrument à l'autre extrémité, un observateur tenant constamment l'ali-

(*) Le problème de la distance d'un point à un autre point inaccessible.

dade mobile dirigée vers l'objet, pourra prononcer à chaque instant à quelle distance de la batterie est cet objet, parce que l'instrument donne cette distance sans calcul » (*).

Si l'objet se meut dans une ligne droite, oblique par rapport aux lignes de feu de la batterie, on parviendra à connaître sa distance, en procédant comme s'ensuit... »

Servois indique alors pour calculer la distance de la batterie

---

(*) On voit, par cette description, en quoi consistait le triangle-équerre de Lagrange, aujourd'hui remplacé par les télémètres. Imaginons un triangle rectangle ABC, dont l'un des côtés AB porte une graduation, de 0 à, 100 par exemple. Au sommet C est fixé une lunette ou une alidade mobile autour de ce point et qu'on peut, à un moment donné, diriger vers le but mobile. Un trépied supporte l'instrument et permet

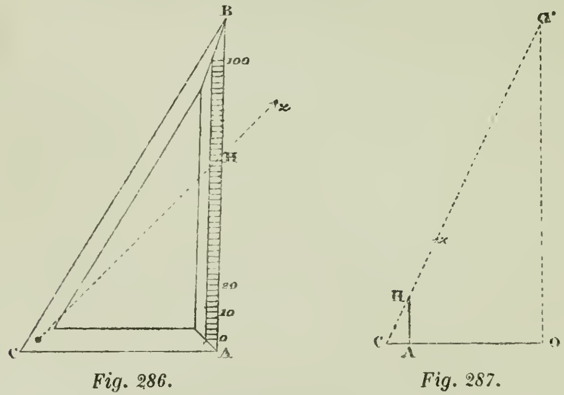


Fig. 286. *Fig. 287.*

de l'installer dans un plan horizontal. La base CO, dont parle Servois, étant mesurée, l'instrument fait connaître, par une simple lecture, la longueur AH; d'après cela, la distance inconnue est donnée par la formule

$$OO' = OC \cdot \frac{AH}{AC}.$$

En supposant $AB = 10AC$, h désignant le nombre correspondant au point H, on a

$$OO' = OC \cdot \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AH}{AB} = OC \cdot 10 \cdot \frac{h}{100};$$

ou, enfin,

$$OO' = \frac{OC.h}{10}.$$

Il suffit donc de multiplier la longueur de la base, par le nombre h donné par l'instrument; on divise ce produit par 10.

Pour les grandes distances, il faudrait prendre un triangle équerre dans lequel le rapport $\frac{AB}{AC}$ serait plus grand que 10; mais, dans ces conditions, les dimensions de l'instrument le rendraient peu pratique.

au but mobile, la solution que nous avons, en la modifiant un peu, reproduite (§ 52), et au moyen de laquelle on détermine la distance d'un point donné à un point inaccessible.

Lorsque le but ne se meut pas en ligne droite, on peut, dit Servois, employer la méthode suivante :

« A est le centre de la batterie, ou à peu près ; X est le but mobile ; AZ est une base de longueur plus grande que la portée moyenne des bouches à feu de la batterie ; elle est mesurée exactement et, sur l'extrémité Z, les divisions, de mètre en mètre, sont indiquées par des piquets, par des cailloux, etc. Si le terrain l'a permis, la direction de cette base a été prise de manière à ne pas former d'angle obtus avec la première ou dernière ligne de feu dirigé sur le mobile ; des jalons sont placés en A, D, B sur AZ, à des distances arbitraires ; un cordeau AC égal à AB et sur lequel on a marqué en E une longueur AF égale à AD, est fixé par une extrémité en A ; huit hommes désignés par E, C, F, G, L, M, N, Z sont chargés des

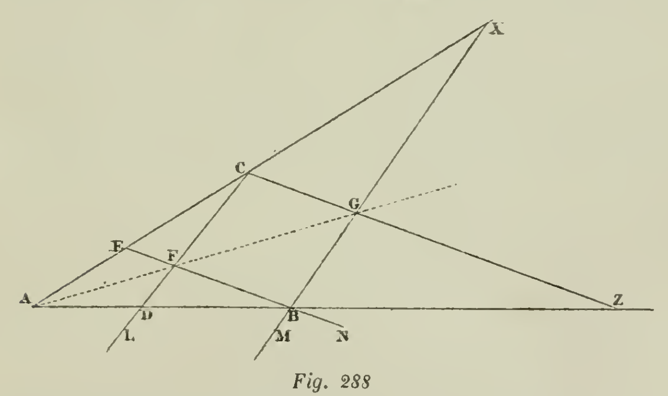


Fig. 288

fonctions suivantes. C, E tiennent le cordeau, l'un en E, l'autre en C, et ont soin d'être toujours dans l'alignement AX ; L, placé à quelque distsnce du jalon D, se tient constamment dans l'alignement CD ; M est toujours dans l'alignement BX ; N est toujours dans l'alignement BE ; F a soin d'occuper constamment le point de concours de DL et BN ; G est constamment au point de concours de AF et BM ; enfin Z est toujours au concours de CG et AB, et il proclame à chaque moment à

quelle distance il est du point A : elle est la même que celle du but X. Si l'objet se meut dans la direction AX, il est clair que les observateurs E, C, F, M peuvent être remplacés par des jalons, que L, N deviennent inutiles, et que G et Z, avec les attributions qu'on leur a données, peuvent seuls déterminer à chaque instant la distance AZ égale à AX. »

Cette solution, assurément, est fort simple, *en théorie ;* mais bien que Servois, avant de l'exposer, prenne la précaution d'avertir le lecteur qu'elle a été, par lui-même « essayée plusieurs fois avec succès », on comprend, sans qu'il soit, je suppose, utile d'insister, qu'une pareille méthode, exigeant le choix d'une base égale à la portée moyenne des bouches à feu, est condamnée d'avance ; elle ne peut manifestement donner lieu à aucune opération pratique.

Nous allons, dans les paragraphes suivants, exposer une solution, moins compliquée, de la question actuelle. Il est vrai qu'elle nous a déjà occupé, quand nous avons examiné (chapitre V, § **53**) le problème de la poursuite. Nous la reprenons ici, pour la traiter avec plus de détails, et en nous plaçant au point de vue spécial du tir des bouches à feu sur un but qui se déplace. Mais nous avons à nous demander d'abord comment on pourra décider si la trajectoire du but mobile est rectiligne ou ne l'est pas.

(A suivre.)

VARIÉTÉS

SUR LA MESURE

DE LA SIMPLICITÉ DANS LES TRACÉS GÉOMÉTRIQUES

Par M. **E. Lemoine**, ancien élève de l'École Polytechnique.

J'ai indiqué, au Congrès d'Oran de l'Association française pour l'avancement des sciences, une méthode permettant de mesurer la simplicité des constructions géométriques. Je vais l'appliquer à deux problèmes, 1° à la recherche de la construction la plus simple du point de *Lemoine;* 2° à celle de la

construction la plus simple pour mener par un point une droite qui passe par le point d'intersection de deux droites qu'on ne peut prolonger jusque-là. Mais comme, évidemment, la méthode dont je parle ne peut être encore connue des lecteurs et que, d'ailleurs, elle semble offrir un intérêt didactique, je vais d'abord l'exposer ici brièvement.

Les constructions géométriques se font au moyen de règles, de compas et d'équerres.

Avec une règle, on ne peut faire que deux opérations élémentaires : 1° faire passer le bord de la règle par *un point* marqué sur l'épure ; c'est l'opération R_1 ; si je fais passer le bord de la règle par *deux points* marqués, en me préparant à tracer la droite qui les joint, je dirai que je fais l'opération $2R_1$; 2° tracer la ligne au crayon ou à l'encre en suivant le bord de la règle, c'est l'opération R_2.

Ainsi, tracer une droite qui passe par deux points marqués, sera faire l'opération $2R_1 + R_2$.

Avec le compas on ne peut faire que trois opérations élémentaires :

1° Mettre *une* pointe sur un point marqué, opération C_1. Ainsi, prendre avec le compas une longueur marquée sera $2C_1$;

2° Mettre une pointe sur une ligne tracée, mais en un point indéterminé, opération C_2 ;

3° Tracer la circonférence, opération C_3.

Nous ne tenons pas compte de la longueur réellement tracée d'une droite ou d'un arc de circonférence ; quelque petits qu'ils soient, ce sera toujours R_2 ou C_3. Ainsi, porter, sur une ligne donnée, la longueur comprise entre les branches d'un compas, sera $C_1 + C_3$ ou $C_2 + C_3$ suivant que le point à partir duquel on porte la longueur sera marqué sur la droite ou sera arbitrairement pris sur la droite.

Avec l'équerre, on peut faire les mêmes opérations R_1, R_2 qu'avec la règle et, en outre : 1° mettre un côté de l'équerre en contact avec le bord de la règle, ou inversement ; c'est l'opération E^1 ; 2° faire glisser l'équerre sur la règle jusqu'à ce qu'un côté passe par un point marqué ; c'est l'opération E_2.

Toute construction géométrique se traduira par un *résultat* : $n_1R_1 + n_2R_2 + n_3C_1 + n_4C_2 + n_5C_3 + n_6E_1 + n_7E_2$; n_1, n_2, etc.

représentant le nombre d'opérations élémentaires R_1, R_2, etc., qui ont été effectuées. Nous admettons que toutes les opérations élémentaires R_1, R_2, C_1, C_2, etc., sont également simples. Nous prenons cette simplicité pour unité; de sorte que nous appellerons *coefficient de simplicité* ou, pour abréger : *simplicité*, le nombre $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 + n_7$.

Il est clair que notre hypothèse de l'égale simplicité des opérations élémentaires peut être contestée, mais la réflexion montre qu'elle se justifie, en ayant égard au degré d'approximation qui est dans l'essence même du problème, puisque nous négligeons les longueurs décrites, l'échelle, etc.

Nous allons indiquer, sans détails, le *résultat* et la *simplicité* des opérations principales qui servent à effectuer toute construction et nous passerons à l'application que nous avons en vue.

Par un point B, *donné sur une droite* BC, *mener une droite qui fasse, avec* BC, *un angle égal à un angle donné* DAE.

Par un point donné, pris hors d'une droite BC, *mener une parallèle à cette droite.*

Pour chacune de ces deux constructions on trouve : Résultat $2R_1 + R_2 + 5C_1 + 3C_3$. Simplicité : 11.

Mener une perpendiculaire à une droite en son milieu, ou trouver le milieu d'une droite donnée.

Résultat : $2R_1 + R_2 + 2C_1 + 2C_3$. Simplicité : 7.

Décrire un cercle sur une droite donnée comme diamètre.

Résultat : $2R_1 + R_2 + 4C_1 + 3C_3$. Simplicité : 10.

Par un point pris sur une droite, ou hors d'une droite, mener une perpendiculaire à cette droite.

Résultat : $2R_1 + R_2 + 3C_1 + 3C_3$; simplicité : 9.

Elever une perpendiculaire à l'extrémité A *d'une droite* AB, *qu'on ne peut prolonger.*

Résultat : $4R_1 + 2R_2 + C_1 + C_3$; simplicité : 8.

Cette construction, indiquée pour un cas particulier, est un peu plus simple que la construction indiquée pour le cas général, il semble donc qu'il serait bon de l'adopter, même quand la droite AB peut être prolongée au delà de A.

1° Trouver le centre d'une circonférence passant par trois points; 2° tracer cette circonférence.

1° Résultat : $4R_1 + 2R_2 + 3C_1 + 2C_3$; simplicité : 12.

2° Résultat : $4R_1 + 2R_2 + 5C_1 + 3C_3$; simplicité : 15.

Diviser en deux parties égales : 1° un angle donné; 2° un arc de cercle donné.

1° Résultat : $2R_1 + R_2 + 3C_1 + 3C_3$; simplicité : 9.

2° Résultat : $2R_1 + R_2 + 2C_1 + 2C_3$; simplicité : 7.

Mener, en un point A *pris sur une circonférence, une tangente à cette circonférence.*

Résultat : $6R_1 + 3R_2 + C_1 + C_3$; simplicité : 11.

Mener, par un point extérieur, les deux tangentes à une circonférence.

Résultat : $6R_1 + 3R_2 + 4C_1 + 3C_3$; simplicité : 16.

Inscrire : 1° une circonférence dans un triangle donné; 2° les quatre circonférences tangentes aux trois côtés.

1° Résultat : $6R_1 + 3R_2 + 11C_1 + 10C_3$; simplicité : 30.

2° Résultat : $18R_1 + 9R_2 + 28C_1 + 24C_3$; simplicité : 79.

Décrire, sur une droite donnée AB, *un segment capable d'un angle donné.*

Résultat : $6R_1 + 3R_2 + 10C_1 + 7C_3$; simplicité : 26.

Diviser en moyenne et extrême raison une droite donnée.

Résultat : $8R_1 + 4R_2 + 8C_1 + 6C_3$; simplicité : 26.

Diviser une droite AB *: 1° en* p *parties proportionnelles à des droites données* $n_1, n_2 \ldots n_p$*; 2° en* p *parties égales; 3° prendre la* $p^{ième}$ *partie de* AB.

1° Résultat : $(2p+1)R_1+(p+1)R_2+(5p+1)C_1+(3p+1)C_3$; simplicité : $11p + 4$.

2° Résultat : $5R_1 + 3R_2 + 8C_1 + (2p + 1)C_3$; simplicité : $2p + 17$.

3° Résultat : $5R_1 + 3R_2 + (p + 6)C_1 + 3C_3$; simplicité : $p + 17$.

Remarque. — Pour certaines valeurs particulières de p, des constructions spéciales peuvent être plus simples; par exemple, si $p = 2^n$, il est facile de voir que la construction se simplifie.

Construire la quatrième proportionnelle à trois droites données.

Résultat : $2R_1 + 3R_2 + 14C_1 + 6C_3$; simplicité : 25.

Construire la moyenne proportionnelle entre deux longueurs données.

Résultat : $6R_1 + 4R_2 + 11C_1 + 6C_3$; simplicité : 27.

Déterminer un point donné par ses coordonnées cartésiennes x, y *relatives à deux axes donnés.*

Résultat : $10C_1 + 4C_3$; simplicité : 14.

Déterminer un point donné 1° par ses coordonnées normales α, β, γ *par rapport à un triangle de référence* ABC; *2° par ses coordonnées polaires* ω *et* ρ; *3° par ses coordonnées biangulaires* ω, ω', *4° par ses coordonnées bipolaires* ρ, ρ'.

1° Résultat : $20R_1 + 10R_2 + 15C_1 + 8C_3$; simplicité : 53.
2° — $2R_1 + R_2 + 8C_1 + 4C_3$; — 15.
3° — $4R_1 + 2R_2 + 10C_1 + 6C_3$; — 22.
4° — $6C_1 + 2C_3$; — 8.

Il va sans dire que nous traçons dans chaque construction le plus petit nombre possible de lignes, en utilisant, quand cela se peut, celles qui sont déjà tracées. *(A suivre.)*

EXERCICES DIVERS

Par M. **Boutin**, professeur au Collège de Courdemanche.

(*Suite*, voir, p. 271.)

---

89. — Vérifier l'identité :

$$\frac{(b+c)bc}{(b-a)(c-a)} + \frac{(a+c)ac}{(c-b)(a-b)} + \frac{(a+b)ab}{(a-c)(b-c)} = a + b + c.$$

90. — Ω, Ω' étant les points de Brocard du triangle ABC, O, R le centre et le rayon du cercle circonscrit, θ l'angle de Brocard, R_a, O_a,... R'_a, O'_a,... le rayon et le centre des cercles circonscrits aux triangles : ΩBC,... Ω'BC,... vérifier les relations :

1° $$R_aR_bR_c = R'_aR'_bR'_c = R^3;$$

2° $$R_aR'_c = R_bR'_a = R_cR'_b = R^2;$$

3° $$\frac{OO_a}{a} + \frac{OO_b}{b} + \frac{OO_c}{c} = \frac{OO'_a}{a} + \frac{OO'_b}{b} + \frac{OO'_c}{c} = \frac{3}{2}\operatorname{cotg}\theta;$$

4° $$\frac{OO_a + OO'_a}{a} = \frac{OO_b + OO'_b}{b} = \frac{OO_b + OO'_c}{b} = \operatorname{cotg}\theta.$$

On a $$R_a = \frac{a}{2 \sin C} \ldots R'_a \frac{a}{2 \sin B},$$
$$OO_a = \frac{a}{2} (2 \operatorname{cotg} C + \operatorname{cotg} A) \ldots$$
$$OO'_a = \frac{a}{2} (2 \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} A) \ldots$$

91. — On projette un point quelconque M du plan d'un triangle en A′, B′, C′ sur les côtés de ce triangle ABC. De A, on abaisse une perpendiculaire sur B′C′, de B une perpendiculaire sur A′C′ ; de C. une perpendiculaire sur A′B′. Ces trois perpendiculaires se coupent en un point inverse de M. dans ABC.

92. — Calculer les angles λ, μ, ν que font entre elles les symédianes d'un triangle quelconque ABC ; et, θ désignant l'angle de Brocard de ce triangle, démontrer la relation :

$$\operatorname{cotg} \lambda + \operatorname{cotg} \mu + \operatorname{cotg} \nu = \operatorname{cotg} 2\theta + 2 \operatorname{tg} \theta.$$

On peut appliquer les formules de l'exercice n° 87 en y faisant :

$$x = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \theta, \quad y = \frac{b}{2} \operatorname{tg} \theta, \quad z = \frac{c}{2} \operatorname{tg} \theta;$$

et. après quelques transformations, on trouve :

$$2 \operatorname{cotg} \theta \operatorname{cotg} \lambda = 1 + 2 \operatorname{cotg} B \operatorname{cotg} C + \operatorname{cotg}^2 A,$$
$$2 \operatorname{cotg} \theta \operatorname{cotg} \mu = 1 + 2 \operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} C + \operatorname{cotg}^2 B,$$
$$2 \operatorname{cotg} \theta \operatorname{cotg} \nu = 1 + 2 \operatorname{cotg} B \operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg}^2 C;$$

d'où, par addition,

$$\operatorname{cotg} \lambda + \operatorname{cotg} \mu + \operatorname{cotg} \nu = \frac{\operatorname{tg} \theta}{2} \left(5 + \sum \operatorname{cotg}^2 A\right),$$
$$= \frac{\operatorname{tg} \theta}{2} (5 + \operatorname{cotg}^2 \theta - 2),$$
$$= \operatorname{cotg} 2\theta + 2 \operatorname{tg} \theta.$$

93. — Un quadrilatère ABCD est inscrit à un cercle O ; ses diagonales se coupent en F. 1° Trouver le rapport de la surface du parallélogramme qui a pour sommets les centres des cercles circonscrits aux triangles ABF. ADF, BCF, CDF, et de la surface du quadrilatère ABCD ; 2° démontrer que O, F, et le centre P du parallélogramme considéré plus haut, sont trois points en ligne droite, équidistants.

O P F

94. — Démontrer que :

$$2 \operatorname{cotg} \theta = \operatorname{cotg} \frac{A}{2} \operatorname{cotg} \frac{B}{2} \operatorname{cotg} \frac{C}{2} - \left(\operatorname{tg} \frac{A}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2}\right),$$

A, B, C désignant les angles d'un triangle, pour lequel l'angle de Brocard est égal à θ.

95. — Démontrer que, dans tout triangle, l'expression

$$\text{séc}\, C[ac(\cos B \cos C - 2 \cos A) + bc(\cos A \cos C - 2 \cos B) + ab(4 - \cos^2 C]$$

est symétrique par rapport aux lettres a, b, c, A, B, C.

Cette expression, après tranformation, devient

$$6S \operatorname{cotg} \theta,$$

θ, désignant l'angle de Brocard de ABC.

96. — a, b, c étant des angles quelconques, vérifier que

$$\sum \frac{\sin 3a}{\sin a(\cos a - \cos b)(\cos a - \cos c)} = 4.$$

97. — Soient ABC un triangle quelconque, AH une hauteur, H' le conjugué harmonique de H par rapport à BC. Posons $H'AH = \alpha$; et soient β, γ les angles analogues. Démontrer les relations :

$$\operatorname{cotg} \alpha + \operatorname{cotg} \beta + \operatorname{cotg} \gamma = 0,$$

$$\operatorname{tg} A \,.\, \operatorname{cotg} \alpha + \operatorname{tg} B \operatorname{cotg} \beta + \operatorname{tg} C \operatorname{cotg} \gamma = 0.$$

On a
$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{AH}{H'B + HB},$$

$$H'B = \frac{a . HB}{HC - HB},$$

d'où
$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{2} (\operatorname{tg} B - \operatorname{tg} C), \text{ etc.}$$

98. — Résoudre l'équation :

$$(x + a + b)^5 = x^5 + a^5 + b^5.$$

On fait tout passer dans le premier membre, et l'on observe que

$$(x + a + b)^5 - x^5 - a^5 - b^5,$$

est divisible par $(x + a)$ $(x + b)$ $(a + b)$ ce qui fournit les deux racines

$$x = -a \qquad x = -b;$$

Or, l'équation proposée est du quatrième degré; cette remarque l'abaisse au deuxième. Les deux autres racines satisfont à l'équation :

$$x^2 + (a + b)\, x + a^2 + ab + b^2 = 0.$$

(A suivre.)

CORRESPONDANCE

Nous avons reçu, de M. Lemoine, la lettre suivante.

MON CHER AMI,

Dans le numéro de Novembre de votre intéressant *Journal de Mathématiques élémentaires*, vous donnez un extrait d'une lettre de M. A. Poulain, sur la confusion qui a régné dans la *spécification* des deux points de Brocard. Permettez-moi d'ajouter quelques mots aux observations que vous avez faites à ce sujet.

Je crois, comme vous, que la spécification est très facile, même de plusieurs façons, également bonnes; pourvu que l'on s'entende sur le point de départ.

Il n'y a pas de différence spécifique entre les points de Brocard, si on les trace dans un triangle où l'on ne met pas de lettres aux sommets. En d'autres termes, si, tournant par exemple dans le sens des aiguilles d'une montre, on considère le triangle dont on note les sommets A, B, C, on a deux points de Brocard et si, dans ce même triangle, laissant son nom au sommet A, on permute les lettres placées aux deux autres sommets, on aura encore les deux mêmes points de Brocard; mais le point qui était le point direct dans la première notation est devenue le point rétrograde dans la seconde.

Donc, par la convention suivante, les deux points sont nettements spécifiés, sans ambiguïté possible.

Si l'on a un triangle ABC, *pris pour triangle de référence, le point dont les coordonnées normales sont* $\frac{b}{c}, \frac{c}{a}, \frac{a}{b}$ *est appelé point direct de Brocard; ses coordonnées barycentriques sont* $\frac{1}{c^2}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}$; *c'est le point négatif de M. Simmons et le* SECOND *point de M*[lle] *Scott.*

LA CONVENTION CONTRAIRE POURRAIT, TOUT AUSSI BIEN, ÊTRE FAITE; le seul avantage de celle-ci, c'est qu'elle paraît maintenant à peu près adoptée, que les conventions ont été établies (voir *Journal de Mathématiques élémentaires 1888*, p. 55) dans un

article *spécialement* fait pour mettre les diverses dénominations en correspondance et qu'un nouveau changement ne pourrait qu'embrouiller la question, au point de vue pratique.

Bien cordialement à vous.

Nous ferons d'abord observer, en répondant à la lettre que l'on vient de lire, qu'il n'y a pas lieu d'être surpris de la confusion qui règne dans le langage de la nouvelle Géométrie; cette confusion des termes était, malheureusement, inévitable dans une science créée par des auteurs si nombreux, écrivant en des lieux si divers. Mais, c'est le devoir de ceux qui s'y intéressent de proposer, pendant qu'il en est temps encore, les meilleures réformes pour dissiper ou, tout au moins, diminuer l'obscurité et l'ambiguïté de certaines expressions.

Je ne crois pas que le seul fait d'un changement puisse rendre la situation plus embrouillée, comme paraît le redouter M. Lemoine; si, comme je le crois, la réforme proposée a pour effet de jeter un peu plus de clarté dans une question encore obscure. Les mots *point direct* ou *point négatif* qui ont été proposés pour *différentier* les deux points de Brocard, n'ont, à mon avis, aucun sens; et je ne crois pas que ces dénominations soient celles qui prévaudront un jour, dans les livres et dans l'enseignement. Si l'on adopte les coordonnées barycentriques, pour écrire la Géométrie du triangle (et tous ceux qui ont pénétré dans cette Géométrie savent qu'il y a, à ce choix, plus d'une bonne raison), les points de Brocard se déduisent du point $\frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}, \frac{1}{c^2}$ par la permutation circulaire des lettres; et c'est là, vraiment, le fond de l'idée Brocardienne. Alors, il ne subsiste aucun doute sur la dénomination qu'il faut adopter, $\frac{1}{b^2}, \frac{1}{c^2}, \frac{1}{a^2}$ doit être appelé le *premier* point de Brocard; $\frac{1}{c^2}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}$, le *second*; comme je l'ai dit *(loc. cit.)* et comme l'avait proposé Mlle Scott.

G. L.

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES (1887).

AMIENS

11 juillet. — I. Comment détermine-t-on l'époque d'une solstice et l'obliquité de l'écliptique?

II. Un tétraèdre DABC satisfait aux conditions suivantes : 1° le trièdre D a pour faces trois angles droits; 2° les deux arêtes opposées AB, CD, sont respectivement égales à a et b; 3° le trièdre AB a une valeur donnée α. Calculer les longueurs x et y des deux arêtes DA, DB. Discuter.

LILLE

15 juillet. — I. Démontrer que si une fraction a ses deux termes premiers entre eux, toute fraction équivalente a pour termes des équimultiples de ceux de la première.

II. Par un point P pris à l'intérieur d'un cercle de rayon R, à une distance du centre $OP = a$, on mène deux cordes rectangulaires AB, CD, dont la première fait avec OP l'angle $OPB = x$. On demande : 1° d'évaluer les longueurs des deux cordes ; 2° de détermiuer l'angle x pour lequel la somme des deux cordes a une longueur donnée $2m$ — Condition de possibilité.

16 juillet. — I. Construire l'angle de deux droites données par leurs projections. (*Géométrie descriptive*).

II. Dans un triangle rectangle ABC, on connaît le côté $BA = c$ et l'angle $BCM = \alpha$ (M étant le milieu du côté BA). — Résoudre et discuter, en prenant pour inconnue le second côté CA de l'angle droit.

18 juillet. — I. Établir *a priori* qu'entre les trois côtés et les trois angles d'un triangle quelconque il ne peut exister que trois relations distinctes. Faire voir que les trois relations :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}, \qquad A + B + C = 180°,$$

entraînent comme conséquence les suivantes :

$$a = b \cos c + c \cos B;$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

II. Un point M, placé sur une ellipse donnée, à une distance $MF = r$ de l'un des foyers, F, est sollicité par deux forces représentées en grandeur et en direction par la normale MN et la tangente MT, limitées au grand axe. 1° Trouver la grandeur de la résultante ; 2° déterminer le rayon r de manière que cette résultante passe au sommet A, et calculer la résultante dans ce cas.

19 juillet. — I. On donne une circonférence de rayou R, et on considère un parallélogramme ABCD circonscrit. Démontrer que le parallélogramme ABCD est un losange et établir en second lieu qu'on a la relation :

$$\frac{1}{\overline{AC}^2} + \frac{1}{\overline{BD}^2} = \frac{2}{4R^2}.$$

II. La balance romaine. Expliquer sa graduation.

QUESTION 258

Solution, par MM. J. Chapron, à Bragelogne et Ignacio Beyens, capitaine du Génie, à Cadix.

Étant donné un quadrilatère inscriptible ABCD, *on en déduit deux autres*, ABEF, ABGH, *tels que* ADH, AEC, AFG, BCG, BFD, BEH, *soient six lignes droites. Cela posé : 1° si l'un de ceux-ci est inscriptible, l'autre l'est également, et les côtés* CD, EF, GH *sont parallèles ; 2° si l'un des côtés* EF, GH *est parallèle à* CD, *l'autre l'est également, et* ABEF, ABGH *sont inscriptibles.*

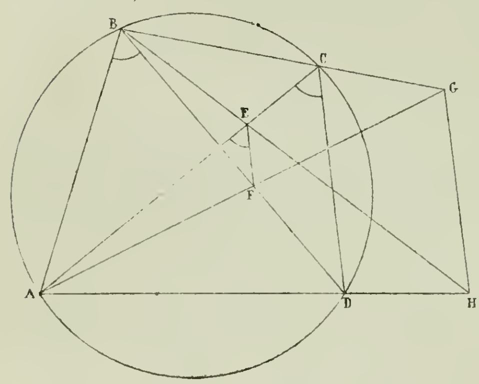
Remarque. *Dans l'hexagone* DFECGH *: 1° les côtés* DF, GC

et la diagonale HE, *concourent en un point* B : 2° *les cotés* CE, HD, *et la diagonale* GF, *concourent en un point* A; 3° *les côtés* EF, GH *sont parallèles à la diagonale* CD. (E. Catalan).

Supposons le quadrilatère ABEF inscriptible; alors l'angle ABF, ou ABD, égal à l'angle ACD, l'est aussi à l'angle AEF. EF est donc parallèle à CD. Prouvons que le quadrilatère ABGH est inscriptible.

$$\widehat{AGB} = (\pi - ABC) - \widehat{BAG} = \widehat{ADC} - (BAC + EAF),$$
$$= \widehat{ADC} - \widehat{BDC} - \widehat{EAF} = \widehat{ADB} - \widehat{EAF}.$$

De même, $\widehat{AHB} = \widehat{ACB} - \widehat{EBF}$.



Les angles $\widehat{AHB}$, $\widehat{AGB}$ sont donc égaux, et le quadrilatère ABGH inscriptible.

L'angle BGH étant égal au supplément de BAH, on peut dire que les angles BCD, BGH sont égaux; CD, GH sont donc parallèles

Réciproquement, si EF est parallèle à CD, on a

$$\widehat{AEF} = \widehat{ACD} = \widehat{ABD} = \widehat{AEF}:$$

le quadrilatère ABEF est donc inscriptible. Ce point établi, on prouve, comme plus haut, que le quadrilatère ABGH est aussi inscriptible; de là, résulte le parallèlisme des droites CD, GH.

Nota. — Nous avons reçu également une très bonne solution de cette question par M. Henry Galopeau, étudiant à Bordeaux.

QUESTION 263

Solution par M. Ignacio Beyens, capitaine du Génie à Cadix.

Dans le triangle rectangle ABC, *on abaisse la perpendiculaire* AD *sur l'hypoténuse* BC, *et, par le point* P *milieu de* BC, *on élève la perpendiculaire* PEF *qui rencontre* AC *en* E *et* AB *en* F. *Si l'on désigne par* h *la hauteur* AD, *par* r_1, r_2, ρ_1, ρ_2 *les rayons des*

cercles inscrits aux triangles ABD, ACD, BPF, CPE, *et par* r, R *les rayons du cercle inscrit et celui du cercle circonscrit au triangle* ABC, *montrer que l'on a :*

(1) $$r_1\rho_1 = r_2\rho_2 = \frac{r^2}{2};$$

(2) $$\frac{r_1}{\rho_1} + \frac{r_2}{\rho_2} = 2;$$

(3) $$R^2 r_1 r_2 = h^2 \rho_1 \rho_2.$$

(G. Russo.)

Nous désignerons par a, b, c les longueurs des côtés BC, CA, AB.

1° Les triangles semblables ABD, PBF donnent

$$(a)\quad \frac{r_1}{\rho_1} = \frac{\frac{c^2}{a}}{\frac{a}{2}} = \frac{2c^2}{a^2}.$$

De même $\frac{r_2}{\rho_2} = \frac{2b^2}{a^2}$,

et, par suite,

$$\frac{r_1}{\rho_1} + \frac{r_2}{\rho_2} = \frac{2(b^2 + c^2)}{a^2} = 2;$$

c'est la formule (2).

2° D'autre part, le triangle ABD rectangle donne

$$r_1 = \frac{AD + BD - AB}{2} = \frac{\frac{c^2}{a} + \frac{bc}{a} - c}{2} = \frac{c(b + c - a)}{2a}.$$

Mais on a

$$2r = b + c - a,$$

et, par suite, $$r_1 = \frac{rc}{a};$$

ou, en tenant compte de (a),

$$\rho_1 = \frac{rc}{a} \cdot a^2 : 2c^2 = \frac{ra}{2c}.$$

On a donc $$r_1\rho_1 = \frac{r^2}{2},$$

et, de même,

$$r_2\rho_2 = \frac{r^2}{2}.$$

Les formules (1) sont donc démontrées.

3° De ces formules et des égalités :

$$\rho_1 = \frac{ra}{2c}, \qquad \rho_2 = \frac{ra}{2b},$$

on déduit
$$4\rho_1\rho_2 = \frac{r^2a^2}{bc}$$

et
$$a^4r_1r_2 = 4\rho_1\rho_2b_2c_2.$$

Mais $ah = bc$, et $2R = a$. Donc, finalement,

$$R^2r_1r_2 = h^2\rho_1\rho_2;$$

c'est la formule (3).

Nota. — Solutions analogues par MM. l'abbé Gelin, professeur au collège [Saint-Quirin, à Huy (Belgique); Mineur, élève au lycée de Dijon; Henry Galopeau, étudiant à Bordeaux.

QUESTION 264

Solution par MM. A. Boutin, professeur au Collège de Courdemanche, et I. Beyens, capitaine du Génie à Cadix.

En posant, comme d'habitude, $C_{n,p} = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2.3\ldots p}$,

démontrer que

$$A = 2C_{n,p} + (4n+9)C_{n,p-1} + (2n+5)C_{n,p-2} = \mathfrak{M}(2p+1).$$

(Catalan.)

On a, par une formule connue :

$$C_{n,p-1} = \frac{n-p+2}{p-1}C_{n,p-2},$$

$$C_{n,p} = \frac{(n-p+1)(n-p+2)}{p(p-1)}C_{n,p-2},$$

et, par suite,

$$A = C_{n,p-2}\cdot\frac{2(n-p+1)(n-p+2)+p(4n+9)(n-p+2)+(2n+5)p(p-1)}{p(p-1)}.$$

Développons le numérateur et décomposons-le en facteurs. Il vient :

$$A = C_{n,p-2}\cdot\frac{(n+1)(2n-p+4)(2p+1)}{p(p-1)},$$

$$A = C_{n+1,p-1}, \left[\frac{2n-p+4}{p}\right] \cdot (2p+1),$$

p étant premier avec $2p+1$, A est toujours multiple de $2p+1$.

REMARQUE. — Quand p est premier avec $2(n+2)$, A étant entier, p divise $C_{n+1.p-1}$; et alors A est divisible par $(2n-p+4)$.

QUESTION 268

Solution par M. G. Russo, à Catanzaro.

Dans tout polygone régulier de n *côtés, inscrit à un cercle de rayon* R, *si l'on désigne par* a *le côté du polygone et par* δ_1, δ_2, δ_3... δ_{n-3} *les diagonales menées d'un sommet à tous les autres, on a la relation :*

$$\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \ldots + \delta_{n-3}^2 = 2(nR^2 - a^2).$$

(E. Vigarié.)

Nous avons démontré (voir J. de M. E., 2e série, 9e année, p. 284 et 285) que : *si l'on a un polygone régulier de* n *côtés, inscrit à un cercle, la somme des carrés des distances d'un point* P *de son plan à ses différents sommets, est constante, pour tous les points de la circonférence concentrique à la circonférence donnée, ayant pour rayon* OP.

D'après cela, soit OP $= r$, et soit R le rayon de la circonférence donnée; δ_1, δ_2, ... δ_n désignant les distances de P aux sommets du polygone, nous avons:

$$\Sigma\delta_n^2 = (R^2 + r^2).$$

Si nous supposons, maintenant, $r = R$; alors, des distances δ_1, ... δ_n, deux deviennent égales à a^2; une autre, est nulle; et toutes les autres sont les diagonales du polygone donné. On a donc :

$$\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \ldots + \delta_{n-3}^2 + 2a^2 = 2nR^2,$$

d'où

$$\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \ldots + \delta_{n-3}^2 + 2(nR^2 - a^2).$$

NOTA. — Démonstrations directes par MM. A. Boutin, professeur au collège de Courdemanche; l'abbé Reboul, licencié ès-sciences mathématiques. ; I, Beyens, capitaine du Génie, à Cadix.

QUESTIONS PROPOSÉES

304. — Soient O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, et I, I_a, I_b, I_c, les centres du cercle inscrit et des cercles exinscrits.

On prend sur les côtés BA, CA, vers le sommet A, les longueurs $BB' = CC' = BC$, et aussi, dans la direction opposée, $BB'' = CC'' = BC$. Cela posé :

1° Les droites $B'C'$, $B''C''$, $B'C''$, $B''C'$ sont respectivement perpendiculaires aux droites OI, OI_a, OI_b, OI_c;

2° Les rayons des cercles circonscrits aux triangles $AB'C'$, $AB''C''$, $AB'C''$, $AB''C'$ sont respectivement égaux à OI, OI_a, OI_b, OI_c. *(J. Neuberg.)*

Le premier cas du 2° m'a été communiqué par M. A. Gob. (J. N.).

305. — Par les milieux A′, B′, C′ des côtés d'un triangle quelconque ABC, on mène les symétriques de BC, CA, AB, par rapport à une direction donnée. Ces trois droites concourent en un point du cercle des neuf points du triangle ABC. *(Em. Lemoine.)*

ERRATUM (*)

La question 279, (année 1888, pp. 96 et 120), doit être corrigée ainsi :
Au 3°, lire :

$$\Sigma \cos 3A \cos^3 (B - C) + 3 \cos (A - B) \cos (B - C) \cos (C - A) - \cos 3A \cos 3B \cos 3C - 1 = 0.$$

(*) Communiqué par M. Lavieuville.

Le Directeur-Gérant,
G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 27336-12-8.

ESSAI
SUR LA
GÉOMÉTRIE DE LA RÈGLE ET DE L'ÉQUERRE
(SECONDE PARTIE)

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite*, voir p. 5.)

---

109. Déterminer la nature de la trajectoire du but mobile. — Soient : O, le centre de la batterie ; O′, un poste d'observation, aussi rapproché de O qu'on le voudra ; M, le point mobile qu'on veut observer. Ayant relevé, avec la fausse équerre, l'angle MOO′, jalonne, par un retour d'équerre, la ligne OZ telle que $\widehat{ZOO'} = \widehat{MOO'}$; le prolongement de MO′ rencontre OZ en un certain point μ. Si μ se meut sur une droite δ ; M est, lui-même, mobile sur une droite D.

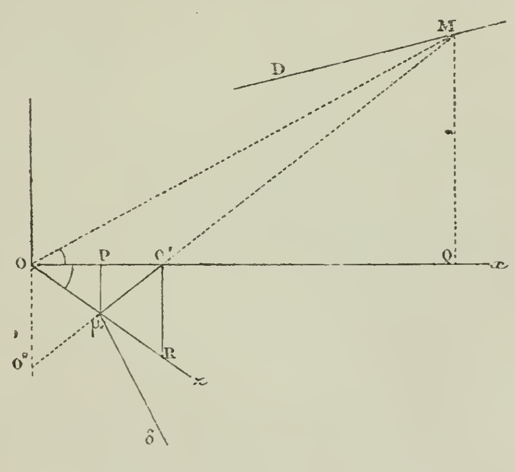


Fig. 289.

Plus généralement, bien que cette dernière remarque n'ait aucun intérêt pratique, les points M, μ, se correspondant homologiquement, décrivent deux courbes de même ordre.

Mais il faut, c'est toujours le point délicat dans ces sortes de problèmes, déterminer la distance du point fixe au point mobile. Nous supposerons, dans ce qui suit, que le déplacement

du but ait lieu en ligne droite; c'est ce qui se produit le plus ordinairement et ce cas offre, seul, assez de simplicité et d'intérêt, pour être examiné ici.

110. La distance au but mobile. — Pour évaluer, rapidement, la distance OM, observons d'abord que les quatre points O'', μ, O', M forment une ponctuelle harmonique; il en est de même de la ponctuelle formée par leurs projections O, P, O', Q, sur OX. Nous avons donc

$$\frac{2}{OO'} = \frac{1}{OP} + \frac{1}{OQ},$$

ou, en remplaçant, dans cette relation homogène, OO', OP, OQ par des longueurs proportionnelles OR, Oμ, OM,

$$(1) \qquad \frac{1}{O\mu} + \frac{1}{OM} = \frac{2}{OR}.$$

On imaginera donc un cordeau divisé, fixé en O, à l'une de ses extrémités; un observateur se déplace, en même temps que M, de façon à rester sur la ligne MO' et sur la droite δ qui correspond à celle sur laquelle se déplace M, droite déterminée par deux observations particulières. Cet observateur n'a plus qu'à lire, sur le cordeau, la distance Oμ; puis, un aide calcule OM, d'après la formule (1); s'il possède une table des inverses, le calcul peut être fait, mentalement, avec la plus grande rapidité.

Le cas particulier où le but mobile M se dirige en ligne droite vers le point O mérite d'être signalé. Dans ce cas, OZ est une droite fixe, et l'observateur μ n'a qu'à se transporter sur OZ, en restant en ligne droite avec le jalon fixé en O', d'une part, et le but mobile, d'autre part.

111. L'ouverture du feu. — Imaginons qu'un vaisseau ennemi M, soit en vue du point O, centre d'une batterie; on connaît la portée maxima h, des pièces à feu de cette batterie, et l'on voudrait savoir d'abord si le bâtiment observé s'avance à portée du tir; on veut aussi, dans ce cas, déterminer le moment favorable à l'ouverture du feu, de façon à surprendre le vaisseau à l'instant précis où les projectiles peuvent le toucher.

Nous distinguerons différents cas; suivant que la trajectoire

rectiligne suivie par M est dirigée vers O, ou est parallèle à la côte, ou, enfin, est quelconque.

1° Le long de la plage jalonnons une droite OZ sur laquelle nous établissons, en O′, un poste d'observation. Prenons, par un retour de la fausse équerre, comme nous l'avons fait à plusieurs reprises, l'alignement OX, symétrique de OM par rapport à OZ. Soit μ le point de rencontre de OX avec le prolongement de MO′. Comme nous l'avons remarqué tout à l'heure, nous avons

$$\frac{1}{OM} + \frac{1}{O\mu} = \frac{2}{OR}.$$

Soit M la position du bâtiment au moment où il pénètre dans le champ de tir ; on a OM $= h$. La relation précédente permet de calculer $O\mu$. Un observateur placé en μ attend le moment où le point mobile vient se placer sur le prolongement de $\mu O'$; et, à cet instant même, donne le signal convenu.

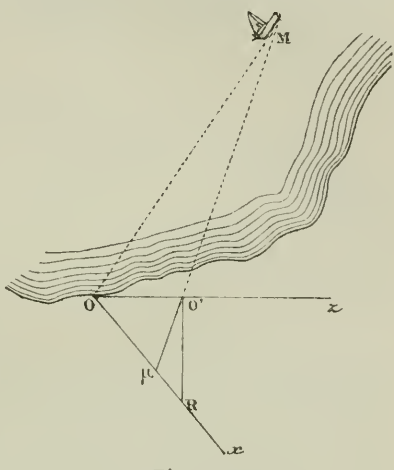


Fig. 290.

Les constructions nécessaires, si grande que soit la distance h, peuvent se faire dans le voisinage de O; puisque la base OO′, étant arbitraire, peut être choisie aussi petite que l'exigera le terrain sur lequel on peut opérer.

Le problème devient plus difficile, lorsque la trajectoire suivie par le vaisseau qu'on observe est une ligne droite Δ ne renfermant pas le centre O de la batterie; tel serait le cas d'un bâtiment passant au large, ou croisant à distance, pour se livrer à certaines observations. Il faut alors déterminer la distance de O à Δ, et savoir si cette longueur est, ou n'est pas inférieure à h. Puis, dans le cas où le bâtiment s'approche suffisamment de O, pour rendre le tir efficace, on peut demander quel est le moment précis où doit s'ouvrir le feu de la batterie, sans qu'il soit nécessaire d'effectuer des tentatives qui, si elles étaient vaines, instruiraient, trop tôt, l'ennemi de la position

qu'il doit conserver et de la distance à laquelle il doit se maintenir pour rester hors de la portée de la batterie.

2° Nous supposerons d'abord que le bâtiment observé M se meut parallèlement à une ligne OZ tracée sur le rivage.

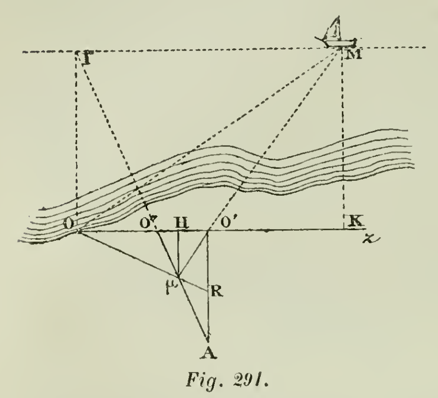


Fig. 291.

Mais on doit se demander, avant tout, comment on pourra vérifier que cette condition se trouve réalisée.

A cet effet, considérons le point μ qui correspond à M, dans la transformation homologique imaginée précédemment. Nous répétons, pour éviter toute confusion, que les points M, μ sont en ligne droite avec un point fixe O′, et que OO′ est, à chaque instant, la bissectrice de $MO\mu$. On sait que, dans cette transformation, à une droite correspond une autre droite; c'est un principe que nous avons déjà utilisé. Mais on sait aussi : 1° que deux droites correspondantes se coupent toujours sur l'axe d'homologie, droite perpendiculaire à OO′, au point O; 2° que deux droites correspondantes coupent OO′ en deux points qui divisent harmoniquement ce segment. En particulier, si l'un d'eux est à l'infini, le point correspondant coïncide avec le milieu de OO′.

Imaginons donc, pour donner à la solution présente un caractère vraiment pratique, un miroir, de dimensions suffisantes, placé en O, dans un plan perpendiculaire à OZ. Un observateur cherche à voir, dans le miroir, le bâtiment observé M ; soit μ la position qu'il occupe à cet instant. Un jalon étant fixé, en O″, au milieu de OO′, il se déplace de façon à ne pas perdre de vue l'image de M. Si la trajectoire décrite par cet observateur est une droite passant par O″, c'est que M est mobile sur une droite MI parallèle à OZ.

Il nous reste à calculer la distance OI du point O, à la droite MI.

Élevons O′R perpendiculairement à OZ ; soit R le point de

rencontre de O′R avec Oμ. Comme nous l'avons déjà observé, on a

$$\frac{1}{O\mu} + \frac{1}{OM} = \frac{2}{OR}.$$

D'ailleurs, les droites OR, OM étant également inclinées sur OZ, leurs projections sur des perpendiculaires à OZ sont proportionnelles et comme la relation précédente est homogène, nous avons

$$\frac{1}{\mu H} + \frac{1}{MK} = \frac{2}{O'R},$$

ou

$$\frac{1}{OI} = \frac{2}{O'R} - \frac{1}{\mu H}.$$

Cette égalité permet de calculer OI; immédiatement, si l'on possède une table des inverses; très simplement, dans tous les cas. On saura donc si OI est inférieur à la portée maxima des pièces, et si, par conséquent, on doit faire les préparatifs nécessaires pour ouvrir le feu, au moment où M passe en I. On observera, d'ailleurs, que la ligne de visée OI est perpendiculaire à OZ, et que la longueur de la ligne de tir est connue : c'est la quantité OI, calculée comme il vient d'être dit.

3° Supposons que la trajectoire suivie par M soit une droite quelconque Δ, rencontrant la ligne OO′ en P, point inconnu, bien entendu, et que nous pouvons supposer très éloigné de O.

L'expérience étant disposée comme nous l'avons indiqué tout à l'heure, l'observateur μ, mobile avec M, décrit, sur le rivage, une trajectoire rectiligne μO″; cette droite, comme nous l'avons dit, va rencontrer Δ en un point Q situé sur la perpendiculaire élevée, en O, à OO′. Imaginons la perpendiculaire OH abaissée de O sur Δ; nous voulons d'abord évaluer OH.

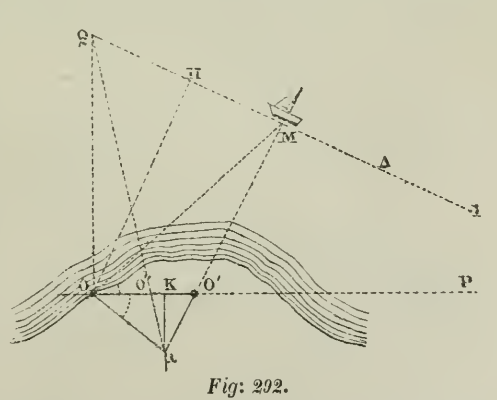


Fig: 292.

Le triangle rectangle POQ donne

(1) $$\frac{1}{\overline{OH}^2} = \frac{1}{\overline{OP}^2} + \frac{1}{\overline{OQ}^2}.$$

La longueur OP se calcule en observant que la ponctuelle O, O′, O″, P est harmonique. Donc

(2) $$\frac{1}{OP} = \frac{2}{OO'} - \frac{1}{OO''}.$$

Quant à OQ, les triangles semblables OQO″, Kμ.O″ prouvent que

(3) $$OQ = K\mu \cdot \frac{OO''}{O''K}.$$

Les égalités (1), (2), (3) résolvent la question posée; si la longueur OH, calculée par ces formules, est plus petite que la portée maxima des pièces, il sera possible, à la batterie placée en O, de diriger ses feux sur le batiment observé. Mais il reste à déterminer le moment où le feu doit s'ouvrir et celui où il doit cesser; c'est-à-dire les deux instants où M est, sur sa trajectoire Δ, à une distance de O égale à la portée maxima h.

Ayant calculé OP, OQ, comme il a été dit, prenons, sur la perpendiculaire élevée, en O′, à OO′, une longueur O′R telle que

$$O'R = OO' \frac{OQ}{OP}.$$

La droite OZ, perpendiculaire à ORL, passe par la projection de O sur PQ; c'est la ligne de tir la plus favorable.

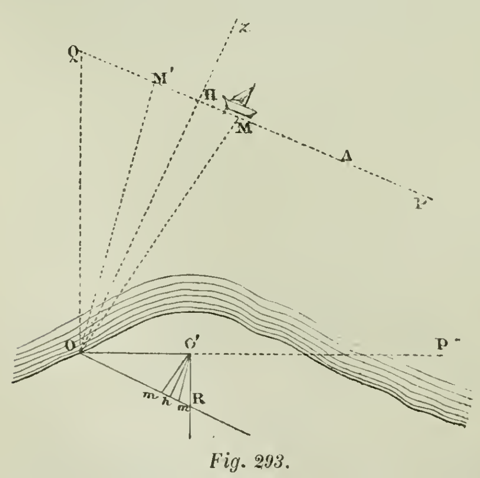


Fig. 293.

D'autre part, abaissons O′h perpendiculaire sur OR; et, avec un cordeau fixé en O′, bien tendu, et dont la longueur est calculée par la formule

$$O'm = O'm' = OM\,\frac{OH}{O'h},$$
$$(OM = h)$$

déterminons, sur OR, les points m, m'; la ligne de tir, pour

l'ouverture du feu, sera parallèle à $O'm$; et, pour la cessation du feu, parallèle à $O''m'$.

Cette solution, basée sur la transformation homologique et sur les principes élémentaires des figures semblables, est assez compliquée; il est bien probable qu'on en imaginera de plus simples.

112. Les feux croisés. — Soient deux batteries installées en A, B; on veut que leurs pièces aillent frapper un alignement CD de façon que les feux se croisent toujours sur cette droite; pourtant, on suppose que le point qu'il faut atteindre n'est visible : ni de A, ni de B. La propriété que nous avons établie *(Première partie*, § 16) peut être utilisée pour résoudre la difficulté proposée.

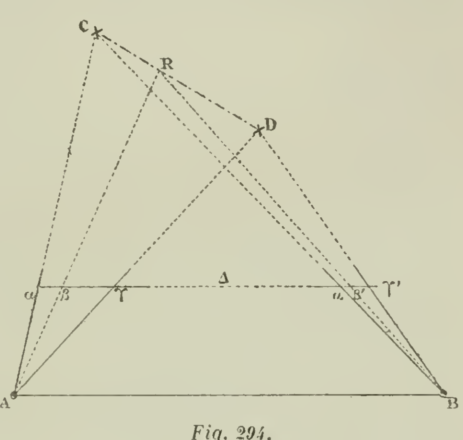


Fig. 294.

Ayant tracé Δ parallèlement à AB, on prendra, sur les segments $\alpha\gamma$, $\alpha'\gamma'$, deux points β, β' tels que

$$\frac{\alpha\beta}{\alpha'\beta'} = \frac{\alpha\gamma}{\alpha'\gamma'};$$

les feux dirigés suivant $A\beta$, $B\beta'$ se croiseront sur CD. Pour le démontrer, on peut s'appuyer sur la propriété rappelée; on peut aussi raisonner de la manière suivante.

Les points β, β' décrivent, sur Δ, deux divisions homographiques; les droites homologues $A\beta$, $B\beta'$ se coupent en un point dont le lieu géométrique est une conique. Mais, si β s'éloigne à l'infini, β', lui aussi, s'éloigne indéfiniment sur Δ; et les rayons homologues, dans ce cas, coïncident avec AB. La droite AB fait donc partie du lieu; par suite, celui-ci se compose de AB et d'une autre droite. Mais C et D font évidemment partie du lieu; par suite, $A\beta$, $B\beta'$ se croisent sur CD.

Dans la pratique, on pourrait partager, au moyen d'un cordeau quelconque, les intervalles $\alpha\gamma$, $\alpha'\gamma'$ en un même nombre de parties égales; en plaçant des piquets aux points obtenus, on devra viser, despoints A, B, ceux qui se correspondent.

113. Les feux convergents. — Supposons que, dans le voisinage d'un point O, on veuille disposer des pièces à feu dont le tir converge vers un point B, invisible mais que l'on sait exister, dans la direction OX, à une distance l, de O.

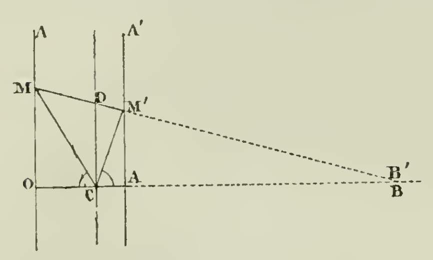


Fig. 295.

Prenons sur OX un point arbitraire A; puis, sur OA, un point C tel que

$$(1) \qquad \frac{1}{OC} = \frac{2}{OA} - \frac{1}{h}.$$

On observe que cette longueur OC se calcule rapidement en utilisant la table des inverses; d'ailleurs, dans le cas actuel, on peut supposer qu'on a tout le loisir nécessaire pour faire le calcul fort simple qui correspond à cette formule.

Cela fait, on jalonne deux droites Δ, Δ' perpendiculaires en O, A sur OA. On fixe sur Δ un jalon en M, point où l'on veut installer la pièce. Avec la fausse équerre, on relève l'angle MCO, et, par un retour d'équerre, on fixe sur Δ', en M', un jalon, de telle sorte que l'angle M'CA = MCO. En visant M', le tir de la pièce à feu placée en M sera dirigé vers le pointinvisible.

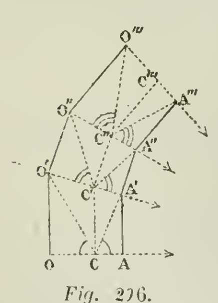


Fig. 296.

En effet, CX étant la bissectrice extérieure de MCM', MM' rencontre OX en un point B' qui forme avec M, D, M' une ponctuelle harmonique; mais, d'autre part, d'après (1), O, C, A, B est une ponctuelle harmonique : d'où l'on conclut que B se confond avec B.

On peut ainsi établir, sur les lignes Δ, Δ', autant de couples tels que M, M' que l'on voudra.

Si l'on préfère disposer les pièces *en éventail*, après avoir installé, comme le représente la figure 296, une pièce en O', avec A' pour point de mire, on répétera, avec O'A' pour base, la construction précédemment faite avec OA; puis, on la reproduira, autant de fois que l'on voudra, en O''A'', O'''A''', etc... On obtiendra ainsi, successivement, les lignes OA, O'A',..., qui concourent au but invisible B.

Quant aux distances OB, O'B,... on les calcule par les formules :

$$\frac{1}{OB} = \frac{2}{OA} - \frac{1}{OC},$$

$$\frac{1}{O'B} = \frac{2}{O'A'} - \frac{1}{O'C'},$$

$$\ldots\ldots\ldots;$$

Dans la pratique, si les pièces ne sont pas très éloignées les unes des autres, on peut considérer les longueurs OB, O'B,... comme sensiblement égales, et régler les hausses en conséquence. *(A suivre.)*

VARIÉTÉS

SUR LA MESURE
DE LA SIMPLICITÉ DANS LES TRACÉS GÉOMÉTRIQUES

Par M. **E. Lemoine**, ancien élève de l'École Polytechnique.

(*Suite et fin*, voir, p. 10.)

Le point de Lemoine K, d'un triangle ABC, peut se construire d'un grand nombre de manières ; en général, il y a différentes façons d'arriver à un même résultat graphique, parmi lesquelles les plus simples sont évidemment celles qui doivent être employées, à moins de circonstances particulières ; nous allons appliquer notre méthode à étudier la simplicité de diverses constructions du point de Lemoine, choisies parmi celles qui semblent les plus simples.

Première Construction. — Je me sers de la propriété suivante : les symédianes sont symétriques de la médiane par rapport à la bissectrice.

De A,B,C, comme centres avec le même rayon je trace trois circonférences (op. $3C_1 + 3C_3$) ; au moyen de leurs intersections je trace les médiatrices de deux côtés BC, CA pour avoir leurs milieux A′,B′ (op. $4R_1 + 2R_2$). Je trace AA′, BB′ qui se coupent en G (op. $4R_1 + 2R_2$). En me servant des circonférences primitivement tracées je fais l'angle ABK = CBG et l'angle BAK = CAG (op. $4R_1 + 2R_2 + 6C_1 + 2C_3$), K est le point cherché.

Résultat : $12R_1 + 6R_2 + 9C_1 + 5C_3$; simplicité : 32.

Deuxième Construction. — Je me sers de la propriété suivante : si A′B′C′ est le triangle formé en menant les tangentes au cercle circonscrit aux points A,B,C ; AA′ BB′, CC′ concourent au point K.

De A,B,C comme centres avec un rayon quelconque je décris trois circonférences (op. $3C_1 + 3C_3$). En dehors du triangle je fais l'angle C′BA et l'angle C′AB égaux à ABC (op. $4R_1 + 2R_2 + 4C_1 + 2C_3$), je joins CC′ (op. $2R_1 + R_2$). Je fais l'angle BCA′ = CBA′ qui est déjà sur la figure, puisque c'est l'angle formé par BC avec le prolongement de BC′ et je joins AA′ (op. $3C_1 + C_3 + 4R_1 + 2R_2$) : K est à l'intersection de CC′ et de AA′.

Résultat : $10R_1 + 5R_2 + 10C_1 + 6C_3$; simplicité : 31.

Troisième Construction. — Elle dérive de cette proposition : la symédiane divise le côté sur lequel elle tombe dans le rapport des carrés des côtés adjacents.

En A, j'élève une perpendiculaire à CA et je me sers, pour cela, d'un cercle décrit de A comme centre avec AB pour rayon, cercle qui coupe la perpendiculaire à CA en I (op. $4C_1 + 3C_3 + 2R_1 + R_2$), je joins BI, CI (op. $4R_1 + 2R_2$). J'abaisse AA′ perpendiculaire sur CI en utilisant le cercle déjà décrit de A comme centre avec AB pour rayon (op. $2R_1 + R_2 + 2C_1 + 2C_3$), par A′ je mène une parallèle à BI qui coupe CB en A_1 et je joins AA_1 c'est la symédiane partant de A (op. $4R_1 + 2R_2 + 5C_1 + 3C_3$).

Je trace, de même, une autre symediane (op. $12R_1 + 6R_2 + 11C_1 + 8C_3$). J'ai donc

Résultat : $24R_1 + 12R_2 + 22C_1 + 16C_3$; simplicité : 74.

Quatrième Construction. — J'utilise la propriété suivante : les distances de K aux trois côtés sont proportionnelles à ces côtés.

Sur les trois côtés, en dehors du triangle, je détermine les sommets A′, B′, C′ des trois triangles équilatéraux BCA′, CAB′, ACB′ (op. $9C_1 + 6C_3$). Dès qu'un sommet, A′ par exemple, a été obtenu et avant de m'occuper des autres, je mène une parallèle par A′ au côté BC en utilisant, pour la construction de cette parallèle, le rayon BC de l'ouverture actuelle de compas, pour décrire de A comme centre avec ce rayon une circonférence qui coupe en A_1 la circonférence déjà décrite de B comme centre. Je joins AA_1 ; c'est une parallèle à BC. Les trois constrctions de parallèles à BC, CA, AB menées par A′, B′, C′ donnent (op. $6R_1 + 3R_2 + 3C_1 + 3C_3$). Ces trois parallèles forment le triangle $A_2B_2C_2$ et AA_2, BB_2, CC_2 se coupent en K. Pour mener AA_2, BB_2 c'est (op. $4R_1 + 2R_2$). J'ai donc,

Résultat : $10R_1 + 5R_2 + 12C_1 + 9C_3$; simplicité : 36.

Je m'appuierai, pour donner une cinquième construction du point de Lemoine sur le théorème suivant que je n'ai vu nulle part malgré sa simplicité.

Soient A_b *et* A_c *les points où la médiane partant de* A *dans le triangle* ABC, *est coupée par la médiatrice de* AB *et par la médiatrice de* AC; CA_c *et* BA_b *se coupent sur la symédiane partant de* A.

La démonstration n'offre aucune difficulté.

Cinquième Construction. — De A, B, C comme centres je décris trois circonférence de même rayon au moyen desquelles je mène les trois médiatrices et les médianes AA′, BB′ (op. $10R_1 + 5R_2 + 3C_1 + 3C_3$) ; les médiatrices de CB et de AB coupent en B_c et B_a la médiane BB′.

Je joins CA_c, BA_b qui se coupent en D_a, puis CB_c, AB_a qui se coupent en D_b; je joins AD_a, BD_b qui se coupent au point de Lemoine (op. $12R_1 + 6R_2$).

Résultat : $22R_1 + 11R_2 + 3C_1 + 3C_3$; simplicité : 39.

On pourrait étudier bien d'autres constructions du point K, mais nous n'en connaissons point qui donne un résultat aussi simple que la suivante.

Sixième Construction. — Soit B′ sur AC et dans le sens AC, tel que AB′ = AB (op. $2C_1 + C_3$). Soit C′ sur AB et dans le sens AB, tel que AC′ = AC (op. $2C_1 + C_3$).

De B, comme centre, avec la longueur AC′, qui est entre les branches du compas, je décris une circonférence (op. $C_1 + C_3$); de C′ comme centre, avec la longueur AB′ = AC, que je reprends puisque le compas a été dérangé, je décris une autre circonférence qui coupe la precédente au sommet A_1 du parallélogramme $B'AC'A_1$ (op. $3C_1 + C_3$). Je joins AA_1, c'est la symédiane partant de A (op. $2R_1 + R_2$). Jusqu'ici j'ai en tout : op. $2R_1 + R_2 + 8C_1 + 4C_3$.

Je trace, de même, une autre symédiane, sur la construction de laquelle je puis économiser $2C_1$, puisque j'aurai à prendre aussi les longueurs de deux côtés du triangle pour cette construction et que l'une de ces deux longueurs étant prise au moment de la construction de AA_1, j'ai pu alors déterminer, avec cette longueur, le point qu'elle me donnerait dans la construction de la deuxième symédiane. Le résultat est donc : $4R_1 + 2R_2 + 14C_1 + 8C_3$; la simplicité : 28.

Remarque. — Si j'employais deux compas, je n'aurais pas besoin de prendre deux fois la longueur AB, je n'aurais qu'à prendre la longueur AC avec le second compas, etc.; cela économiserait encore $2C_1$ pour la construction de chaque symédiane, on aurait denc :

Résultat : $4R_1 + 2R_2 + 10C_1 + 8C_3$; simplicité : 24.

Nous allons nous occuper maintenant de la deuxième question que nous nous proposons de traiter; nous n'indiquerons que la construction et le résultat avec la simplicité.

Mener par un point A *une droite passant par le point d'intersection de deux droites* BC, DE *que l'on ne peut prolonger.*

Première Construction. — Par A je mène les deux droites BAE, DAC, je joins BD, CE qui se coupent en F; par F je mène une droite quelconque qui coupe DE en H, BC en G; je joins CH, EG qui se coupent en A′; je mène AA′, c'est la droite cherchée.

Résultat : $13R_1 + 8R_2$; simplicité : 21.

Deuxième Construction. — Par A, je mène deux droites ADC, AEB; je prends les milieux de D′, E′, B′, C′ de AD, AE, AB, AC en remarquant que je n'ai pour cela qu'à décrire de A, B, C, D, E comme centres de cinq cercles de même rayon; je joins B′ C′, D′ E′ qui se coupent en A_1, je joins AA_1 qui est la droite cherchée.

Résultat : $16 R_1 + 9R_2 + 5C_3$; simplicité : 35.

Troisième Construction. — Par A, je mène une droite quelconque ABE, je prends les milieux B′; E′ de BA, EA par B′ et par E′ je mène des parallèles respectivement à BC et à DE; ces parallèles se coupent en A_1; je joins AA_1 qui est la droite cherchée.

Résultat : $11 R_1 + 6R_2 + 13C_1 + 9C_3$; simplicité : 39.

Quatrième Construction. — Par A, je mène une droite quelconque ABE, sur BE je prends B′ tel que E soit le milieu de BB′; par B′ je mène une parallèle à BC qui coupe DE en E′ et par E′ une parallèle à BB′ qui coupe BC en B_1. A partir de B_1 je prends A_1 sur B_1 E′ tel que $B_1A_1 = 2BA$, je joins AA_1 qui est la droite cherchée.

Résultat : $7R_1 + 4R_2 + 15C_1 + 9C_3$; simplicité : 35.

Cinquième Construction. — Par A je mène une droite quelconque BE et une parallèle quelconque DC à BE. Je joins DB, par A je mène une parallèle a ED qui coupe BD en K; par K, une parallèle à BC qui coupe CD en A_1, je joins AA_1, c'est la droite cherchée.

Résultat : $11 R_1 + 6R_2 + 15C_1 + 9C_3$; simplicité : 41.

Sixième Construction. — Pour fixer la figure, supposons A dans l'angle aigu des deux droites données. Par A, je mène une droite quelconque BAD (op. $R_1 + R_2$); de A, comme centre, je décris une circonférence avec AC pour rayon, elle coupe AC en C (op. $2C_1 + C_3$); de B et de C, comme centres, avec AB pour rayon, je décris des circonférences qui se coupent en A_1 (op. $2C_1 + 2C_3$); je joins A_1B qui coupe DE en E (op. $2R_1 + R_2$); je joins AC et sur CA dans le sens CA, je prends AD′ = AD (op. $2R_1 + R_2 + 2C_1 + C_3$); je complète le parallélogramme AD′EG en décrivant, de C, comme centre, avec AD

pour rayon, une circonférence qui coupe en G la circonférence décrite, de A, comme centre, avec D'E comme rayon (op. $4C_1 + 2C_3$) ; je trace AG qui coupe CE en I (op. $2R_1 + R_2$), c'est la droite cherchée; en effet, on a :

$$\frac{CI}{IE} = \frac{CA}{AD'} = \frac{AB}{AD}.$$

Le résultat est $7R_1 + 4R_2 + 10C_1 + 6C_3$; la simplicité 27.

On pourrait multiplier les solutions graphiques de ce problème; mais en n'employant que la règle et le compas, je n'en connais pas de plus simple que la première et elle n'exige que l'emploi de la règle. Si, avec l'équerre, j'exécutais la cinquième construction j'aurais :

Résultat: $9R_1 + 5R_2 + 2E_1 + 2E_2$,; simplicité 18.

La méthode précédente permet de se mettre en garde, *au point de vue du tracé*, contre les illusions que l'élégance, de l'*exposition*, met souvent dans l'esprit. Ainsi pour tracer les huit cercles tangents à trois cercles donnés extérieurs l'un à l'autre, si l'on emploie l'élégante méthode de Bobillier et Gergonne, le coefficient de simplicité sera 500; il ne sera que 335 par la méthode terre à terre, qui ramène la question au tracé de la circonférence passant par un point et tangente à deux circonférences, etc. Il eût été difficile de soupçonner ce fait *a priori*.

CORRESPONDANCE

Nous avons reçu, de M. Tarry, la lettre suivante que, faute de place, nous n'avons pu encore insérer.

MONSIEUR,

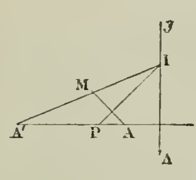
Voici une démonstration très simple d'une généralisation du théorème de M. Thiry, citée dans le journal de ce mois (*).

Quand le point I se meut sur Δ, les rayons A'I, AM décrivent des faisceaux projectifs à celui de la droite PI, et, par conséquent projectifs entre eux. Donc, le lieu du point M est une conique, et réciproquement.

(*) Voyez *Journal* 1888; p. 249.

Cette réciproque est la généralisation du théorème de M. Thiry.

Si les trois points A, A′, P sont situés sur une même ligne droite perpendiculaire à Δ, il est évident que AA′ est un a xe de la conique. On déduit, du cas général, une nouvelle description organique des coniques par la règle et l'équerre, connaissant cinq points de la courbe. On peut observer que, si l'équerre est mal construite, le dessin est encore exact, puisqu'il suffit que l'angle des droites PI, AM soit constant.



Alger, 20 novembre 1888.

M. Mosnat, professeur au Lycée de Toulon, nous adresse la lettre suivante.

J'ai, depuis quelque temps déjà, donné, à mes élèves, une démonstration, sur la tangente à l'ellipse, analogue à celle que M. Lemoine a proposée à vos lecteurs (J. M. E. n° 1, 1889, p. 4).

Elle est peut-être un peu plus courte, et, pour ce motif, je me permets de vous l'adresser.

Si l'on abaisse des points F, F′ (*) les perpendiculaires FG. F G′ sur OM, on a :

$$\frac{\text{aire } M_1FI}{\text{aire } M_1F'I} = \frac{M_1G}{M_1G'} = \frac{IF}{IF'}.$$

Mais l'on a

$$M_1G = MF, \qquad M_1G' = MF'$$

d'où

$$\frac{MF}{MF'} = \frac{IF}{IF'}, \text{ etc...}$$

EXERCICES DIVERS

Par M. **Boutin**, professeur au Collège de Courdemanche.

(*Suite*, voir, p. 14.)

99. — Trouver, dans le plan ABC, un point tel qu'en le joignant aux trois sommets, le triangle ABC soit partagé en trois autres ayant même périmètre.

(*) Le lecteur est prié de se reporter à la figure placée à l'endroit cité. Par une erreur de gravure, la droite FG doit être légèrement prolongée.

Soient x, y, z, les distances du point cherché aux trois sommets ; $2p_1$ le périmètre commun ; on a

$$x + y + c = x + z + b = y + z + a = 2p;$$

d'où

$$y - z = b - c,$$
$$x - y = a - b,$$
$$x - z = a - c.$$

Le point cherché est donc celui où se coupent les hyperboles ayant, pour foyers, deux des sommets du triangle et qui passent par le troisième. (Voir *J. M. E.*, numéro d'octobre 1886, p. 236, — 13 § 4°.)

On a aussi

$$c - z = b - y = a - x = p - p_1;$$

ce qui montre que ce point est le centre d'un cercle tangent intérieurement à trois circonférences décrites chacune d'un des sommets du triangle comme centre, avec le côté opposé pour rayon.

100. — Trouver, dans le plan d'un triangle, un point tel qu'en le joignant aux trois sommets, et nommant x, y, z ses distances aux sommets, on ait

$$a^2 - y^2 - z^2 = b^2 - x^2 - z^2 = c^2 - y^2 - x^2.$$

Des relations données, on tire

$$x^2 + a^2 = y^2 + b^2 = z^2 + c^2.$$

relations vérifiées par

$$x = 2\text{R} \cos \text{A},$$
$$y = 2\text{R} \cos \text{B},$$
$$z = 2\text{R} \cos \text{C}.$$

Le point cherché est donc l'orthocentre de ABC.

On a d'ailleurs

$$a^2 - y^2 - z^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 8\text{R}^2.$$

101. — Trouver, dans le plan d'un triangle ABC, un point qui, joint aux sommets, partage ABC en trois triangles tels que la somme des carrés des côtés de chacun d'eux soit constante.

Ce point est l'anti-complémentaire de l'orthocentre.

En effet, si x, y, z sont des distances aux trois sommets, on a

$$a^2 + y^2 + z^2 = b^2 + x^2 + z^2 = c^2 + x^2 + y^2,$$
$$x^2 - y^2 = a^2 - b^2.$$

Le lieu des points tels que $x^2 - y^2 = a^2 - b^2$, est une perpendiculaire à AB menée par l'isotomique du pied de la hauteur sur le côté AB.

Le point cherché se trouvera sur les trois droites analogues. Or. on voit que ces droites concourent au point H′ symétrique de H par rapport au centre du cercle circonscrit à ABC ; H′ est aussi, dans le langage de la Géométrie du triangle, l'anti-complémentaire de l'orthocentre.

102. — Dans tout triangle, l'angle des deux symédianes issues d'un même sommet est égal à l'angle formé par la médiane issue de ce sommet et par le côté opposé.

1° Démonstration trigonométrique.

Soit AN la symédiane extérieure de A : elle fait, avec AB, l'angle C. Si AF est la symédiane intérieure, on a

$$\text{cotg FAB} = 2 \text{ cotg A} + \text{cotg C},$$
$$\widehat{\text{FAN}} = \widehat{\text{C}} + \widehat{\text{FAB}},$$
$$\text{cotg FAN} = \frac{\text{cotg C }(2 \text{ cotg A} + \text{cotg C}) - 1}{2\ (\text{cotg A} + \text{cotg C})} = \frac{1}{2}(\text{cotg C} - \text{cotg B})$$
$$= \text{cotg AMB}.$$

2° Démonstration géométrique.

Soit DOME le diamètre du cercle circonscrit, perpendiculaire à BC ; G, F les points où la médiane AM et la symédiane AF rencontrent la circonférence de ce cercle.

On a : arc FE = arc EG,
arc AD = arc EH.

On veut prouver l'égalité des angles AMB, FAN ; il suffit de vérifier celle de leurs compléments : AMB_1 FAH.

$\widehat{\text{AMD}}$ a pour mesure : $\dfrac{\text{arc AD}}{2} + \dfrac{\text{arc EG}}{2}$

$$= \frac{\text{arc EH}}{2} + \frac{\text{arc EF}}{2} = \frac{1}{2} \text{ arc FH} ;$$

ce qui est la mesure de l'angle FAH.

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES (1887).

21 juillet. — I. Si les extrémités A et B d'une corde de longueur constante glissent sur une circonférence de rayon R, un point quelconque C de la corde mobile décrit une circonférence. Calculer la surface de la couronne comprise entre les deux circonférences, connaissant les longueurs AC $= a$, BC $= b$ des deux segments de la corde.

II. cos $2a$ étant égale à $\frac{1}{2}$, on demande de trouver tg $\frac{a}{2}$.

22 juillet. — I. Étant données les projections d'une droite et celles d'un point, ainsi que la projection horizontale d'un second point, expliquer comment on peut trouver la projection verticale de celui-ci, sachant qu'il est dans le plan déterminé par la droite et le premier point.

N.-B. — Préférer une solution qui n'exige pas la recherche des traces du plan.

II. Par un point A, situé à une distance OA $= a$ du centre d'une circonférence de rayon R, on mène la sécante ABC, qui fait, avec OA, l'angle BAO $= \alpha$. Déterminer cet angle de manière que l'on ait AB = BC. — Conditions de possibilité. Valeur de AB dans ce cas ; construction géométrique.

III. Un poids P descend le long d'un plan incliné, de longueur l, en soulevant un poids P′ qui remonte le long de la hauteur AB du même plan. Quelle sera l'accélération du mouvement qui en résultera, et le temps employé par le poids P′ pour parcourir la hauteur h du plan ?

Application : P $= 5^{\text{kg}}$, P′ $= 2^{\text{kg}}$, AC $= l = 5^{\text{m}}$, AB $= h = 3^{\text{m}}$.

23 juillet. — I. Connaissant le rayon R et l'apothème a d'un polygone régulier, calculer le rayon R′ et l'apothème a' d'un polygone régulier ayant même périmètre et deux fois plus de côtés.

II. — Étudier les variations de la fonction $6x^2 + 7x + 10$. quand x varie de $-\infty$ à $+\infty$.

25 juillet. — I. Démontrer que la condition suffisante et nécessaire pour qu'un angle droit, situé dans l'espace, reste droit en projection, est que l'un des côtés soit parallèle au plan de projection. Si cette condition n'est pas remplie, reconnaître dans quel cas la projection sera un angle obtus et dans quel cas un angle aigu.

II. Un point M, situé sur une ellipse donnée, à une distance $MF = r$ de l'un des foyers, est sollicité par deux forces représentées, en grandeur et en direction, par les deux rayons vecteurs MF et MF′. Calculer la résultante de ces deux forces et l'angle α qu'elle fait avec le grand axe. Calculer et construire géométriquement, ensuite, la valeur de r pour laquelle cette résultante est double de r : valeur de l'angle α dans ce cas.

26 juillet. — Les nombres a et b étant donnés, entre quelles limites m doit-il être compris pour que l'équation $\frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+b} + \frac{1}{x+m} = 0$ ait ses racines réelles?

II. Un plan étant défini par ses traces, on prend, dans ce plan, un point (m, m'). Par ce point (m, m'), et dans le plan donné, on mène deux droites perpendiculaires entre elles, l'une de ces droites étant horizontale. On porte sur chaque droite, à partir du point m et dans les deux sens, une même longueur donnée a. Trouver les projections des quatre points ainsi déterminés. On fera l'épure et on l'expliquera.

27 juillet. — I. Lois de Képler. Leurs conséquences.

II. On considère une ellipse ayant pour longueurs d'axes $2a$ et $2b$; par un sommet A, on mène une corde AM. Déterminer cette corde de telle sorte que la différence entre AM et sa projection AP, sur le diamètre AA′ ait une valeur donnée l. Discuter.

28 juillet. — I. Étant données une progression géométrique

$$a, \quad aq, \quad aq^2 \ldots,$$

et une progression arithmétique

$$b, b + r, b + 2r \ldots,$$

trouver les conditions pour que

1° Le produit de deux termes quelconques de la première fasse partie de cette mêmé progression;

2° La somme de deux termes quelconques de la seconde fasse partie de cette progression;

3° La somme de deux termes quelconques de la seconde occupe le même rang que le produit des termes de même rang, pris dans la première.

II. Par un point A pris dans l'intérieur d'un cercle de rayou donné R, à une distance du centre $OA = a$, on mène une corde BAC faisant, avec OA, un angle donné $OAB = \alpha$.

1° Calculer les deux segments AB, AC, ainsi que l'angle AOB;

2° Déterminer α de manière que AC soit double de AB. — Conditions de possibilité. — Valeurs de AB, de AC et de l'angle AOB dans ce cas.

29 juillet. — I. Mener une tangente à une parabole, définie par son

foyer et sa directrice : 1° en un point de la courbe; 2° par un point du plan non situé sur la courbe, 3° parallèlement à une direction donnée.

II. On lance un corps de haut en bas, dans le vide, avec une vitesse initiale de 3^m par seconde. Il arrive à terre avec une vitesse de 31^m par seconde. Calculer la hauteur de chute.

QUESTION 267

Solution par M. LAVIEUVILLE, professeur au Collège de Dieppe.

Démontrer que l'on a :

$$\left.\begin{array}{l} \sin a \sin(b-c) \sin(b+c-a) \\ + \sin b \sin(c-a) \sin(c+a-b) \\ + \sin c \sin(a-b) \sin(a+b-c) \end{array}\right\} \equiv 2\sin(a-b)\sin(b-c)\sin(c-a), \quad (\alpha)$$

et aussi

$$\left.\begin{array}{l} \cos a \sin(b-c) \cos(b+c-a) \\ + \cos b \sin(c-a) \cos(c+a-b) \\ + \cos c \sin(a-b) \cos(a+b-c) \end{array}\right\} \equiv 2\sin(a-b)\sin(b-c)\sin(c-a). \quad (\beta)$$

1° Si l'on applique la formule connue :

$$\sin(b+c-a) + \sin(a+c-b) + \sin(a+b-c) - \sin(a+b+c) \equiv 4 \sin a \sin b \sin c,$$

à chacun des termes qui forment le premier membre de l'identité; celui-ci devient, après réduction,

$$(1) \quad \sin 2(b-a) + \sin 2(a-c) + \sin 2(c-b) \equiv 2[\sin a \sin(b-c) \sin(b+c-a) + \sin b \sin(c-a) \sin(c+a-b) + \sin c \sin(a-b) \sin(a+b-c)].$$

Si $A + B + C = 0$, on a l'identité

$$\sin A + \sin B + \sin C \equiv -4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

Appliquons cette formule aux angles $2(b-a)$, $2(a-c)$, $2(c-b)$ dont la somme est nulle; alors l'identité proposée (α) devient manifeste.

2° L'identité (β) se déduit immédiatement de (α), en y remplaçant : a, par $\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$; b, par $\left(\frac{\pi}{2} - b\right)$; et c, par $\left(\frac{\pi}{2} - c\right)$.

NOTA — Solutions diverses par MM. l'abbé Gelin professeur au collège Saint-Quirin à Huy (Belgique); Biermann, ancien élève de l'École

polytechnique, ingénieur à Montauban; A. Boutin, professeur au collège de Courdemanche.

M. Boutin ajoute, à sa solution, d'intéressantes remarques.

Si nous ajoutons (α), (β), et si nous observons que

$\sin a \cos(b+c-a) + \cos a \sin(b+c-a) = \cos(b+c-2a)$,

on a

$\Sigma \sin(b-c)\cos(b+c-2a) \equiv 4\sin(a-b)\sin(b-c)\sin(c-a)$,

identité peut-être nouvelle.

En effectuant la soustraction des identités (α), (β), (γ), on a encore

$$\Sigma \sin(b-c)\cos(b+c) = 0,$$

identité qui figure dans l'ouvrage de M. Desboves (*).

Si dans (α), (β), on remplace respectivement a, b, c par B + C, A + C, A + B (**), il vient

$\Sigma \sin(B+C)\sin(B-C)\sin 2A = 2\sin(A-B)\sin(B-C)\sin(C-A)$

$\Sigma \cos(B+C)\sin(B-C)\sin 2A = 2\sin(A-B)\sin(B-C)\sin(C-A)$

Si, dans (γ), on remplace a, b, c par $a+h$, $b+h$, $c+h$ (**), et qu'ensuite on pose $h = \frac{\pi}{4}$; on a:

$$\Sigma \sin(b-c)\sin(b+c) = 0;$$

Cette identité figure aussi dans le Recueil cité.

QUESTION 269

Solution par M. A. Boutin, professeur au Collège de Courdemanche.

Si, des points de Brocard ω, ω', *on abaisse, sur les côtés du triangle de référence* ABC, *les perpendiculaires* ωα, ωβ, ωγ ; ω'α', ω'β', ω'γ' ; *les deux triangles* αβγ, α'β'γ' *sont équivalents* (***) *et ont même angle de Brocard que le triangle* ABC. (E. Vigarié.)

En posant $k^2 = a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2$, l'on a (****)

$$\omega A = \frac{b^2c}{k}, \qquad \omega B = \frac{c^2a}{k}, \qquad \omega C = \frac{a^2b}{k};$$

$$\omega' A = \frac{c^2b}{k}, \qquad \omega' B = \frac{a^2c}{k}, \qquad \omega' c - \frac{b^2a}{k};$$

(*) *Questions de Trigonométrie* (Delagrave, éditeur).

(**) Ces procédés, comme l'observe avec raison M. Boutin, constituent de véritables méthodes permettant de tirer, d'une identité donnée, de nouvelles identités.

(***) On verra plus loin qu'ils sont égaux.

(****) V. *Journal*, 1883, p. 14.

$$\sin\theta = \frac{2S}{k}, \qquad a^2 + b^2 + c^2 = 4S \cot\theta;$$

θ désignant, suivant l'usage, l'angle de Brocard, ABC.

Soient x, y, z les distances de ω aux trois côtés, $2S'$ l'aire du triangle $\alpha\beta\gamma$. On a

$$x = \omega B.\sin\theta = \frac{c^2 a \sin\theta}{k},$$

$$y = \omega C.\sin\theta = \frac{a^2 b \sin\theta}{k},$$

$$z = \omega A.\sin\theta = \frac{b^2 c \sin\theta}{k};$$

$$2S' = xy \sin C + xz \sin B + yz \sin A$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{k^2}(b^3a^3c\sin A + b^2c^3a \sin B + a^3c^2b \sin C)$$

$$= \frac{abc\sin^2\theta}{k^2}\cdot\frac{1}{2R}(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) = \frac{abc\sin^2\theta}{2R}.$$

$$S' = S\sin^2\theta.$$

Si l'on reproduit le même calcul, en partant du second point de Brocard, on arrive à la même expression pour la surface S″ du triangle $\alpha'\beta'\gamma'$.

Soient a', b', c', les côtés du triangle $\alpha\beta\gamma$, le quadrilatère $\omega\beta A\gamma$ étant inscriptible on a :

$$\frac{a'}{\sin A} = \omega A,$$

$$(1)\quad \begin{cases} a'^2 = \overline{\omega A}^2.\sin^2 A = \dfrac{b^4c^2}{k^2}\sin^2 A = \dfrac{4S^2}{k^2}\cdot b^2 = b^2\sin^2\theta, \\ b'^2 = \overline{\omega B}^2.\sin^2 B = \dfrac{c^4a^2}{k^2}\sin^2 B = \dfrac{4S^2}{k^2}\cdot c^2 = c^2\sin^2\theta, \\ c'^2 = \overline{\omega C}^2.\sin^2 C = \dfrac{a^4b^2}{k^2}\sin^2 C = \dfrac{4S^2}{k^2}\cdot a^2 = a^2\sin^2\theta. \end{cases}$$

Ainsi, le triangle $\alpha\beta\gamma$ est semblable à ABC: ces triangles ont donc le même angle de Brocard.

Remarque. — En appelant a'', b'', c'' les côtés de $\alpha'\beta'\gamma'$, on aurait, de même,

$$(2)\quad a''^2 = c^2\sin^2\theta, \quad b''^2 = a^2\sin^2\theta, \quad c''^2 = b^2\sin^2\theta.$$

De la comparaison des formules (1) et (2), il résulte

$$a'' = b', \qquad b'' = b' \qquad c'' = a'.$$

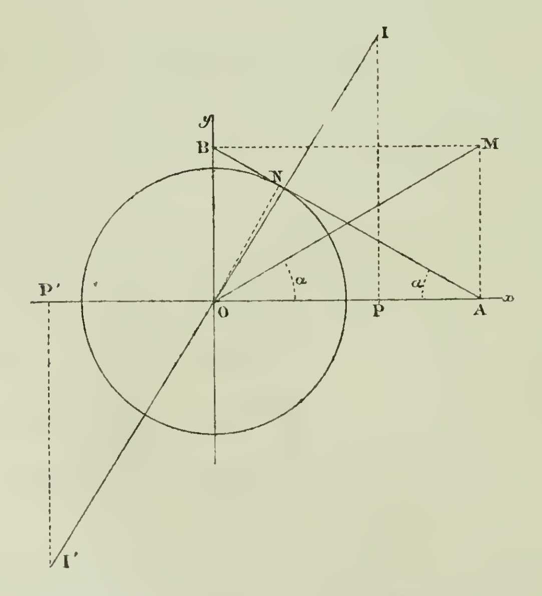
Ainsi, les triangles $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$ sont égaux; ils ont donc même aire, et même angle de Brocard.

On peut encore observer : 1° que ω est un des points de Brocard, de $\alpha\beta\gamma$; 2° que ω' est un des points de Brocard, de $\alpha'\beta'\gamma'$; 3° que $A\omega$, $B\omega$, $C\omega$ sont respectivement perpendiculaires aux côtés de α',β',γ'; 4° que $A\omega'$, $B\omega'$, $C\omega'$ sont perpendiculaires aux côtés du triangle $\alpha\beta\gamma$.

QUESTION 270

Solution par M. Galban, élève à l'École polytechnique de Madrid.

On considère un cercle Δ *et deux diamètres rectangulaires* Ox, Oy; *une tangente mobile rencontre* Ox *en* A, *et* Oy *en* B; *on mène*



par A *une parallèle à* Oy, *par* B *une parallèle à* Ox; *soit* M *son point de rencontre.*

Démontrer que, si sur la droite, menée par O, *symétrique de* Ox,

par rapport à OM, *on prend* $\pm$ OI = OM *le lieu de* I *est un système de deux droites parallèles à* Ox. (G. L.)

Dans le triangle OPI, nous avons :

$$IP = OI \sin 2\alpha = 2OI \sin \alpha \cos \alpha.$$

Or, le triangle OMA nous donne

$$OM = OI = \frac{OA}{\cos \alpha}$$

et d'ailleurs, dans le triangle OAN, on a :

$$OA = \frac{R}{\sin \alpha}$$

et, par suite, $$OI = \frac{R}{\sin \alpha \cos \alpha},$$

ou, finalement, $$IP = 2R$$

NOTA. — Solutions analogues par MM. A. Boutin, professeur au collège de Courdemanche ; Henri Galopeau, étudiant à Bordeaux ; Alexandre Couvert, élève au lycée Condorcet.

QUESTION 272

Solution par A. BOUTIN, professeur au Collège de Courdemanche. et Al. COUVERT, élève au Lycée Condorcet.

Soit un triangle ABC. *Sur* BC, *on prend un point* M *et l'on trace, par ce point, des parallèles aux côtés* AB, AC. *Soient* P, Q *les points de rencontre de ces parallèles avec ces côtés. On prend* CP′ = k.CP; BQ′ = k.BQ, k *désignant une constante donnée* : *les parallèles menées par* P′, Q′, *aux côtés* AB, AC, *se coupent en* I ; *trouver le lieu décrit par ce point.* (G. L.)

Soient D, E les points où Q′I, P′I rencontrent BC. Le triangle DEI est semblable à ABC; car ils sont équiangles.

La similitude des triangles BQ′D, BQM; CP′E, CPM donne

$$BD = k.BM, \qquad CE = k.CM,$$

$$BD + CE = k(BM + CM) = k.BC ;$$

d'où $$DE = BC \pm k.BC = BC(1 \pm k) ;$$

donc DE est constant; par suite, le triangle DEI est constant, la distance de I à BC est constante, et le point I décrit une parallèle à BC.

QUESTIONS PROPOSÉES

306. — Deux cercles variables tangents entre eux sont, en outre, tangents chacun à une droite fixe, en un point fixe. Quel est le lieu de leur point de contact? *(d'Ocagne.)*

307. — Résoudre l'équation

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} + \frac{1}{x-b-c+a} = 0;$$

et vérifier qu'elle a toutes ses racines réelles. *(G. L.)*

308. — On donne une circonférence Δ et un diamètre AB : on propose de trouver, sur Δ, un point M, tel que la tangente en M rencontrant AB prolongé en P, on ait

$$AM = 2MP.$$

On démontrera que le point cherché M se projette sur AB en un point M' tel que AM' est égal au côté du triangle équilatéral inscrit dans Δ. *(G. L.)*

309. — Soient AM, AN deux cordes issues de l'extrémité A d'un diamètre AB, appartenant à une circonférence Δ.

Démontrer que, pour mener, par A, une corde AP moyenne géométrique entre AM, AN il suffit : 1° de rabattre en AP', sur AC, la hauteur AH du triangle AMN ; 2° de considérer P' comme étant la projection du point inconnu P sur AB. *(G. L.)*

310. — On considère une circonférence Δ et deux rayons rectangulaires OA, OB. D'un point M, mobile sur Δ, on abaisse une perpendiculaire MC sur OB ; les droites AC, OM se coupent en I. Démontrer que le lieu de I est une parabole ayant pour foyer, le point O; pour directrice, la tangente en A. *(G. L.)*

Le Directeur-Gérant,

G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 1478-1-9.

THÉORÈMES GÉNÉRAUX SUR LES POLYGONES

par M. **Vigarié.**

On a déjà proposé et résolu, dans ce Journal, plusieurs questions se rapportant aux propriétés des polygones inscrits à un cercle. Voici quelques théorèmes généraux, bien connus, qui permettent de les résoudre facilement.

Sturm, dans les *Annales de Gergonne* (vol. XV, 1824-1825, pp. 250-256), a démontré les théorèmes suivants :

I. — *Le lieu géométrique des points du plan d'un polygone régulier desquels, abaissant des perpendiculaires sur les directions de ses côtés, la somme des puissances semblables d'un degré quelconque des longueurs de ces perpendiculaires est une grandeur constante donnée, est nécessairement une circonférence concentrique au polygone dont il s'agit, toutes les fois du moins que l'exposant de la puissance est inférieur au nombre des côtés de ce polygone.*

On peut, à ce théorème substituer le suivant, beaucoup plus général.

II. — *Le lieu géométrique des points du plan d'un polygone régulier desquels, abaissant des perpendiculaires sur les directions de ses côtés, une fonction symétrique rationnelle et entière, de forme quelconque, des longueurs de ces perpendiculaires est une quantité constante, est une circonférence concentrique au polygone dont il s'agit toutes les fois du moins que le nombre des dimensions de la fonction est inférieure au nombre des côtés de ce polygone.*

III. — *Étant donné un polygone régulier d'un nombre quelconque de côtés, une circonférence concentrique à ce polygone est le lieu géométrique des points de chacun desquels, abaissant des perpendiculaires sur ses côtés, l'aire du polygone, qui a pour sommets les pieds de ces perpendiculaires, est d'une grandeur donnée.*

IV. — *D'un point quelconque d'une circonférence concentrique à un polygone régulier donné : on abaisse des perpendiculaires sur*

les directions de ces côtés, la somme des carrés des côtés du polygone irrégulier inscrit, dont les sommets consécutifs seront les pieds de ces perpendiculaires, demeurera constante.

V. — *Une circonférence concentrique à un polygone régulier donné est le lieu géométrique des points de chacun desquels, menant des droites à tous ses sommets, la somme des puissances paires, de même degré, des longueurs de ces droites, est une grandeur constante, pourvu toutefois que l'exposant commun de ces puissances paires soit inférieur au nombre des côtés du polygone régulier donné.*

Observons que le théorème III permet de résoudre facilement la question suivante :

Déterminer l'aire d'un polygone dont les sommets sont les pieds des perpendiculaires abaissées, sur les directions des côtés d'un polygone régulier, d'un point donné dans le plan de ce polygone (Annales de Gergonne, t. XV, p. 45).

Ce théorème a été énoncé par Lhuilier dans la *Bibliothèque universelle* (mars 1824, p. 169).

On trouve encore dans les *Annales de Gergonne* (t. XV, 1824-25, p. 344) (proposé sans nom d'auteur). le théorème suivant :

VI. — *Une circonférence, dont le rayon est* r, *étant divisée en* n *parties égales et* m *étant un nombre plus petit que* n, *la somme des* 2 m^{mes} *puissances des droites menées aux points de division, d'un point quelconque du plan du cercle, éloigné du centre de la quantité* k, *a pour expression :*

$$\mathrm{n}\left\{(\mathrm{r}^{\mathrm{m}})^2 + \left(\frac{\mathrm{m}}{1}\,\mathrm{kr}^{\mathrm{m}+1}\right) + \left(\frac{\mathrm{m}}{1}\cdot\frac{\mathrm{m}-1}{2}\cdot\mathrm{k}^2\mathrm{r}^{\mathrm{m}-2}\right) + \ldots\right\}.$$

Cette proposition a été démontrée par Lenthéric (*Annales de Gergonne*, t. XVI, p. 120-132).

Soient P_1, P_2, P_3... les points qui divisent la circonférence de centre C et M le point considéré, situé à la distance k du centre O. En faisant $m = 1$, on a :

$$\overline{MP}_1^2 + \overline{MP}_2^2 + \ldots \overline{MP}_n^2 = n(r^2 + k^2).$$

Ce qui donne une expression très simple de la somme des carrés des droites menées, aux sommets d'un polygone régu-

lier, d'un point quelconque de son plan; et montre que cette somme est constante pour tous les points également distants du centre du polygone (Th. IV de Sturm).

On obtient ainsi la solution de la question n° 165 (voir J. E. 1885, p. 284; 1886, p. 163; 1887, p. 71).

ABPC, DEFQ *sont deux circonférences concentriques*, ABC, DEF *deux triangles équilatéraux inscrits à ces circonférences. Soient* P *et* Q *deux points pris sur chacune de ces circonférences. Démontrer que l'on a :*

$$\overline{QA}^2 + \overline{QB}^2 + \overline{QC}^2 = \overline{PD}^2 + \overline{PE}^2 + \overline{PF}^2.$$

Soient R et r les rayons des deux circonférences considérées; on a

$$\overline{QA}^2 + \overline{QB}^2 + \overline{QC}^2 = 3(R^2 + r^2) = \overline{PD}^2 + \overline{PE}^2 + \overline{PF}^2.$$

Si le point M (Th. VI) coïncide avec un des sommets du polygone, deux des droites MP_1, MP_2 ... MP_n sont des côtés; les autres sont des diagonales; alors $k = r$ on trouve ainsi la question 268 que nous avons proposée (voir la solution J.-E., 1889, p. 23):

Dans tout polygone régulier de n côtés, inscrit à un cercle de rayon r, si l'on désigne par a le côté du polygone et par δ_1, δ_2 ... δ_{n-3} les diagonales menées d'un sommet à tous les autres, on a la relation :

$$\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \ldots + \delta_{n-3}^2 = 2(nr^2 - a^2).$$

VII. — *Un polygone quelconque étant circonscrit, un cercle* R *et un autre cercle* r *étant concentrique à celui-là, la somme des produits des côtés du polygone, par les carrés des distances d'un point quelconque de la circonférence du second cercle au point de contact de ces côtés avec le premier, est une quantité constante* (LENTHERIC, loc. cit,, p. 130-132).

Cette proposition a été démontrée dans ce journal par M. G. Russo (1885, p. 284). Si M est le point pris sur la circonférence ABC... on a

$$MA.a + MB.b + \ldots = (R^2 + r^2)(a + b + c \ldots).$$

Si le polygone est régulier et a n côtés:

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 \ldots = n(R^2 + r^2).$$

On déduit de cette remarque une solution de la question 165 (J. E. 1885, p. 284-285).

Si M est sur la circonférence même du cercle inscrit, alors $R = r$; on a donc

$$\overline{MA}^2 \cdot a + \overline{MB}^2 \cdot b + \ldots = 2r^2(a + b + c\ldots),$$

et, dans le cas où le polygone est régulier,

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \ldots = 2nr^2.$$

VIII. — *Dans un plan, le lieu des points tels que la somme des carrés de leurs distances à un ensemble de* n *points* A, B, ... *formant une figure quelconque, soit égale à un carré donné* k^2, *est une circonférence ayant pour centre le centre* O *des moyennes distances des points considérés et dont le rayon* ρ *est donné par la formule*

$$\rho^2 = k^2 - \frac{\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 + \ldots}{n}.$$

Si A, B, C... forment un polygone régulier $OA = OB = \ldots = R$, on a

$$k^2 = n(\rho^2 + R^2).$$

. . . .

ESSAI
SUR LA
GÉOMÉTRIE DE LA RÈGLE ET DE L'ÉQUERRE
(SECONDE PARTIE)

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite*, voir p. 25.)

Pour indiquer une application de ce problème à l'art de la Guerre, on pourrait imaginer que l'ennemi, après avoir été attiré en B, serait, à un signal donné, brusquement assailli par les projectiles des pièces, celles-ci étant disposées comme nous l'avons dit. Leur tir serait préparé de façon que les projectiles vinssent frapper ce point B, et l'effet produit serait d'autant plus efficace qu'il proviendrait de points invisibles pour l'ennemi.

114. Le tir concentrique. — Nous avons supposé que le tir des pièces, dont les feux convergent vers le point B, pouvait être réglé de façon que les obus vinssent, uniformément, frapper le but, bien que ces pièces fussent placées à des distances inégales. Le problème actuel peut être envisagé à un autre point de vue.

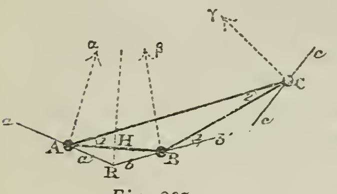


Fig. 297.

Supposons que trois batteries soient installées aux points A, B, C; on voudrait tirer, de ces points, sur une ville assiégée, *à la portée maxima* et de façon que le tir soit *concentrique;* nous entendons, par là, que les projectiles doivent tomber au même point. On demande si le problème en question est possible, et, dans tous les cas, on propose d'installer une série de batteries pouvant, à un signal donné, ouvrir, à la portée maxima, un tir concentrique.

Soient A, B, C les emplacements jugés favorables à l'établissement des trois premières batteries; il s'agit de déterminer d'abord, pour chacune d'elles, la ligne de visée.

Relevons, avec la fausse équerre, l'angle CAB; puis, jalonnons aux points B, C, les droites bb', cc', telles que

$$\widehat{b'BC} = \widehat{cCB} = \widehat{BAC},$$

Les lignes de tir sont des droites $B\beta$, $C\gamma$ perpendiculaires, respectivement: la première, à bb'; l'autre, à cc'. On détermine, de même, en relevant l'angle ACB, la droite aa' et par suite, la perpendiculaire $A\alpha$ qui représente la ligne de tir au point A. On voit, en effet, que les droites aa', bb', cc' construites comme il vient d'être dit, sont les tangentes à la circonférence circonscrite au triangle ABC. Les droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$, suffisamment prolongées, vont donc concourir en un certain point O, centre de cette circonférence.

Pour avoir la longueur commune des droites OA. OB, OC, on peut utiliser la formule connue

$$4OA = \frac{AB.\ BC.\ CA}{\text{aire ABC}}.$$

On peut aussi observer que le triangle rectangle OAR donne

$$\frac{1}{OA^2} = \frac{1}{AH^2} - \frac{1}{AR^2}.$$

Si la longueur OA, ainsi calculée, est égale à la portée maxima h, des pièces, les batteries occupent l'emplacement qu'elles doivent avoir : et, pour chacune d'elles, la ligne de tir est déterminée. Dans le cas contraire, on déplacera celles-ci, dans un sens ou dans l'autre, de quantités égales, sur les lignes de tir, de façon que, dans leur nouvelle position, elles soient à la distance h du point O.

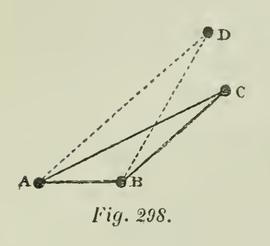


Fig. 298.

Il nous reste à dire comment, les trois premières batteries étant installées pour le tir concentrique, on pourra fixer les positions des autres batteries.

Avec la fausse équerre on relève l'angle ABC ; puis, on cherche dans le voisinage de l'emplacement désigné pour la nouvelle batterie, un point D, d'où l'on aperçoive BC sous un angle ADB = ACB. On fixe alors, comme il a été dit, la ligne de tir qui correspond à ce point D. On obtiendra ainsi, successivement, autant de points que l'on voudra.

115. Le tir central. — On peut considérer ce problème comme étant l'inverse de celui que nous venons d'examiner; voici en quoi il consiste.

Imaginons trois points visibles, mais inaccessibles, A, B, C; on propose d'indiquer la position d'une batterie qui soit placée en O, à égale distance de ceux-ci ; O étant connu, on demande d'évaluer cette distance.

C'est à la transformation par inversion (*) que nous demanderons la réponse à cette question.

Prenons arbitrairement un point P, comme pôle de la transformation. Soient A', B', C' les points inverses de A, B, C. Les perpendiculaires élevées aux milieux des côtés du triangle A'B'C' se coupent en O, le centre cherché O se trouve

(*) On a vu précédemment (§ 64) comment on construisait, point par point, l'inverse d'une figure donnée. A ce propos, on a dû remarquer avec quelle simplicité on peut, sur le terrain, effectuer le tracé de cette figure. Ainsi, bien que la chose puisse paraître étrange au premier abord, on obtient plus rapidement la transformation par inversion des espaces inaccessibles, que leur transformation par homothétie.

sur PO′. En effet, à la circonférence passant par A, B, C, correspond une autre circonférence circonscrite à A′B′C′; on sait d'ailleurs que les centres de deux circonférences inverses sont en ligne droite avec le point choisi pour pôle de la transformation.

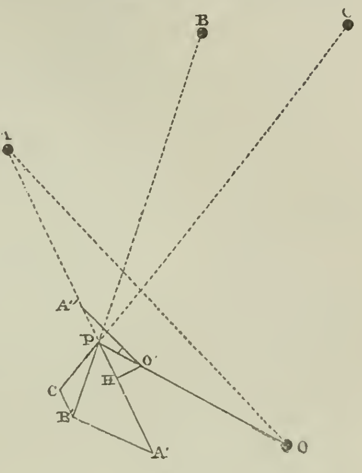


Fig. 299.

Pour déterminer complètement le centre O, on pourrait prendre un autre pôle P et, par son intermédiaire, obtenir une seconde droite concourant au point cherché, avec PO′. Mais il est plus simple d'observer que la ligne OA est parallèle à la droite O′A″ qui joint O′ au point A″, symétrique de A′, par rapport à H. On sait, en effet, que si deux circonférences sont inverses l'une de l'autre, par rapport au pôle P, la droite AA′ qui joint deux points associés rencontrent la circonférences, A′B′C′ en un point A″, les rayons OA, O′A″ sont parallèles. Or, en prenant HA″ = A′H, A″ représente le second point commun à A′A et à la circonférence A′B′C′. D'après cela, après avoir relevé, avec la fausse équerre, l'angle PO′A″, on s'avancera sur PO′ jusqu'à ce que l'on trouve un point O, d'où le segment PA soit vu sous l'angle PO′A″. On pourra répéter cette construction successivement pour les deux autres points B, C; on obtiendra, de la sorte, une double vérification du premier tracé.

Pour avoir OA, on utilisera la formule

$$OA = \frac{O'A''.PO}{PO'}.$$

116. Le changement de position. — Une batterie étant installée en A, on peut, pour divers motifs, vouloir la déplacer ; et, dans ce cas, on peut, d'abord, demander que, dans sa seconde situation, elle conserve sa distance au point B, qui représente le but.

Ayant jalonné une droite xx' dans la région où doit être choisie la nouvelle position de la batterie, on relève, avec la fausse équerre l'angle BAx; puis, l'on cherche sur Ax un point C tel que $BCA = BAX$; c'est en C qu'on doit installer la batterie.

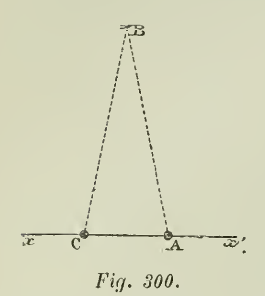


Fig. 300.

Si l'on désire se rapprocher de B, on doit prendre position entre A, C; on se placera, au contraire, sur Cx, ou sur Ax', si l'on veut s'éloigner du but.

Supposons, maintenant que, au point B, soit installée une batterie ennemie; il peut arriver que celle-ci modifie son emplacement et vienne en B'; on peut alors demander quelle doit être la nouvelle position A' de la batterie A, si la distance des batteries doit être maintenue.

Le problème comporte, évidemment, une infinité de solutions; mais il faut indiquer par quel procédé on peut en déterminer une.

Après avoir jalonné un segment AM, perpendiculaire à AB, on relève sa longueur, au moyen du cordeau. Ayant, alors, pris un point H, dans la région où l'on veut installer la batterie, on élève HK, perpendiculairement à HB'; puis, l'on détermine, sur HK, un point K tel que HKB' soit égal à AMB; ce dernier angle ayant été relevé par une fausse équerre. Si HK est égal à AM, H est le point cherché; dans le cas contraire, si HK est, par exemple, plus petit que AM, on se transporte dans la direction B'K jusqu'à ce qu'on trouve un point M', tel que $A'M' = AM$. Il suffit, à cet effet, de prendre avec le cordeau $HR = MA$; la perpendiculaire élevée en R, à HR, coupe B'K au point cherché.

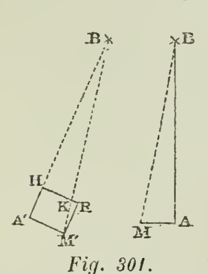


Fig. 301.

Cette construction est basée, comme l'on voit, sur l'égalité de deux triangles rectangles. Il va, sans dire, qu'elle peut être réalisée avec des triangles quelconques, en utilisant uniquement le cordeau et la fausse équerre.

Dans le cas où le déplacement de B se fait dans la direction

même de AB, (comme il arrive, lorsqu'une batterie, trop vivement pressée par le feu d'une batterie ennemie, veut se dérober à son attaque), la solution précédente se simplifie notablement. Ayant tracé un alignement Δ parallèle à AB, un indicateur se meut sur Δ, en même temps que se déplace la batterie B et de telle sorte que l'angle ΔMB soit toujours le même, dans les diverses positions de la batterie ennemie. Le déplacement de la batterie A, se fait alors au moyen de l'indicateur que nous venons d'imaginer; il suffit que, dans ce déplacement, l'angle MAB reste constant. De la sorte, la batterie A conserve, vis-à-vis de l'autre, la distance qui était favorable à son tir.

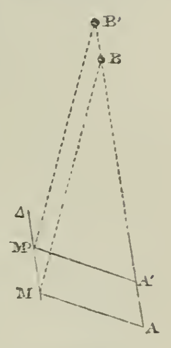


Fig. 302.

(A suivre.)

CONCOURS GÉNÉRAL DE PHILOSOPHIE 1888

Solution par M. Gaston NIEWENGLOWSKI,
Élève de Mathématiques élémentaires au Lycée Louis-le-Grand
(classe de M. Humbert).

DEUXIÈME ACCESSIT

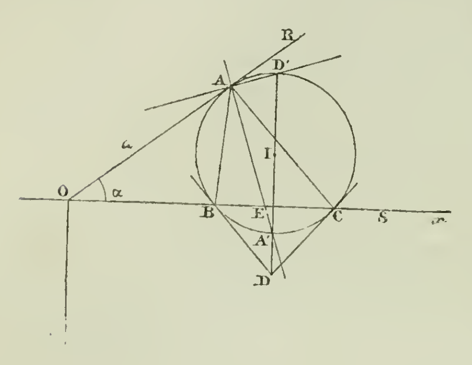
Compositions du premier concours (*).

I. — *On donne deux droites qui se coupent* OR *et* OS; *et, sur la droite* OR, *un point* A. *On considère tous les cercles tangents à* OR *au point* A, *qui coupent la droite* OS; *soient* B *et* C *les points où un de ces cercles rencontre la droite* OS, *et soit* D *le point de rencontre des tangentes menées à ce cercle aux points* B *et* C. *On demande 1° le lieu du centre du cercle inscrit dans le triangle* ABC *et les lieux des centres des cercles ex-inscrits au même triangle; 2° le lieu du centre du cercle inscrit dans le triangle* BCD *et les lieux des centres des cercles ex-inscrits au même triangle.*

(*) Ce concours a été annulé.

1° Le centre du cercle inscrit au triangle ABC est sur la bissectrice AA′ de l'angle $\widehat{BAC}$. Or l'angle $\widehat{OEA}$ a pour mesure :

$$\frac{\text{arc AB} + \text{arc CA}'}{2} = \frac{\text{arc AB} + \text{arc BA}'}{2} = \frac{\text{arc AA}'}{2}$$



Mais l'angle OAA′ a aussi pour mesure $\frac{\text{arc AA}}{2}$. On a donc $\widehat{OAA'} = \widehat{OEA}$.

Le triangle OAE est donc isoscèle, et l'on a $OE = OA = a$; ce qui montre que la droite AA′ est fixe. Par suite le lieu des centres des cercles inscrit et ex-inscrit dans l'angle $\widehat{A}$ du triangle ABC.

La bissectrice extérieure AD′ de l'angle $\widehat{A}$ est donc fixe ; par suite, elle représente le lieu des centres des cercles ex-inscrits dans les angles B et $\widehat{C}$.

2° Le centre du cercle inscrit au triangle CBD est le point A′, milieu de l'arc BC ; son lieu est encore la droite AA′.

Le centre du cercle ex-inscrit à l'angle $\widehat{BDC}$ est le point D diamétralement opposé au point D; le lieu de ce point est la droite AD′.

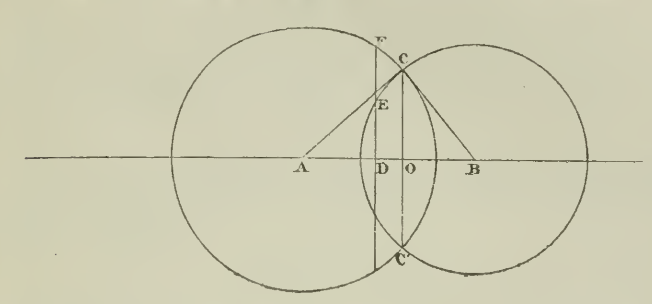
Quant au lieu des centres des cercles ex-inscrits aux angles $\widehat{CBD}$, $\widehat{BCD}$, c'est une courbe du quatrième ordre, représentée par l'équation :

$$[(x^2 + y^2 - a^2)^2 - 4x^2y^2] \sin \alpha + 2xy(x^2 - y^2 + a^2) \cos \alpha = 4ayx^2$$

en prenant pour axes OS et Oy perpendiculaires à OS; et en posant $OA = a$ $\widehat{ROx} = \alpha$.

11. — *Soient* A *et* B *les centres de deux cercles se coupant orthogonalement aux points* C *et* C′. *Soit* O *le point de concours des droites* CC′ *et* AB. *Si on désigne par* a *et par* b *les distances du point* O *aux points* A *et* B, *et on suppose* a ⩾ b. *On demande*

de déterminer la distance du point O *à un point* D *de la droite* AB *tel que la perpendiculaire menée par ce point* D *à la droite* AB



rencontre l'une et l'autre des circonférences des cercles donnés et détermine dans ces cercles deux cordes dont la somme des carrés soit égale à un carré donné $4k^2$. *Discuter.*

Prenons pour inconnue la distance DG $= x$ du point cherché D au milieu G de la droite AB. On doit avoir :

$$\overline{DE}^2 + \overline{DF}^2 = k^2;$$

ou, en appelant R et R' les rayons des deux cercles :

$$R^2 + R'^2 - (\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2) = k^2;$$

ou, en observant que, dans le triangle rectangle ACB. on a :

$$R^2 + R'^2 = \overline{AB}^2 = (a + b)^2,$$

et en remplaçant AD et BD par leurs valeurs $\frac{a+b}{2} + x$ et $\frac{a+b}{2} - x$:

$$(a + b)^2 - \left[\left(\frac{a+b}{2} + x\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2} - x\right)^2\right] = k^2;$$

d'où l'on tire facilement :

$$(2x)^2 = 2k^2 - (a + b)^2.$$

La longueur $2x$ est facile à construire : c'est le côté d'un triangle rectangle dont $k\sqrt{2}$ est l'hypoténuse et $a + b$ un côté de l'angle droit. La condition de réalité de x est :

$$k^2 \leqslant \frac{(a+b)^2}{2}.$$

La discussion s'achève facilement

Compositions du second concours.

I. *On donne, dans un plan, deux points fixes* A *et* A'*; on mène, dans ce plan, un cercle* C *de rayon quelconque tangent à la droite* AA' *au point* A *et un cercle* C' *tangent à la même droite au point* A' *et tangent au cercle* C'. *On mène la tangente commune extérieure, autre que* AA', *aux deux cercles* C, C''*; soient* B, B' *les deux points de contact. Sur* BB' *comme diamètre, dans le plan de la figure, on décrit un cercle* C''*: 1° démontrer que tous les cercles, tels que le cercle* C'', *qu'on obtient en faisant varier le rayon du cercle* C, *sont tangents à un même cercle fixe; 2° trouver le lieu du centre de chacun des cercles tels que le cercle* C'', *obtenus en faisant varier le rayon du cercle* C.

1° Il est facile de voir que les cercles C'' sont tangents au cercle fixe décrit sur AA' comme diamètre.

2° Le lieu des centres des cercles C'' est évidemment le cercle décrit du milieu de AA' comme centre avec un rayon égal à AA'.

II. — *Étant donnés les trois côtés* a, b, c *d'un triangle* ABC, *calculer les rayons de trois sphères tangentes entre elles deux à deux et tangentes au plan du triangle* ABC, *la première en* A, *la seconde en* B, *la troisième en* C. *Cela fait, considérant les deux côtés* a *et* b *comme seuls connus, déterminer le troisième côté* c, *de façon que la somme des rayons des trois sphères soit égale à une longueur donnée* l. *Discuter ce dernier problème, seulement dans le cas particulier où* $b = a$*; et, dans ce cas, reconnaître, suivant la grandeur de* l, *dans quel cas l'angle* $\widehat{ACB}$ *est moindre que* 60°, *compris entre* 60° *et* 90°, *plus grand que* 90°.

Les centres O, O' et O'' des trois sphères sont situés sur les arêtes d'un prisme droit triangulaire ayant pour base le triangle ABC. Par le centre O, menons la parallèle OB' à AB (*). Le triangle rectangle OO'B' donne :

$$\overline{OO'}^2 = \overline{O'B'}^2 + \overline{OB'}^2.$$

On obtient facilement, en appelant R, R', et R'' les rayons

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

des trois sphères, les trois équations :

(1) $$RR' = \frac{c^2}{4},$$

(2) $$R'R'' = \frac{a^2}{4},$$

(3) $$RR''' = \frac{b^2}{4}.$$

En multipliant membre à membre, puis extrayant la racine carrée, on obtient :

$$RR'R'' = \frac{abc}{8}.$$

Conséquemment

$$R = \frac{bc}{2a}, \qquad R' = \frac{ac}{2b}, \qquad R'' = \frac{ab}{2c}.$$

La condition $R + R' + R'' = l$ revient à l'équation

$$\frac{bc}{2a} + \frac{ac}{2b} + \frac{ab}{2c} = l.$$

ou $$f(c) = (a^2 + b^2)c^2 - 2labc + a^2b^2 = 0.$$

Pour qu'une valeur de c convienne, il faut qu'elle soit réelle et comprise entre $a - b$ et $a + b$.

Dans le cas particulier où $a = b$, on doit résoudre et discuter le système :

$$\begin{cases} f(c) = 2c^2 - 2lx + a^2 = 0, \\ 0 < x < 2a. \end{cases}$$

Le discriminant de $f(c)$ est $l^2 - 2a^2$; il change de signe pour $l = a\sqrt{2}$; de plus, $f(0)$, c'est-à-dire a^2, est toujours positif.

On voit d'ailleurs, facilement, que la grandeur de l'angle ACB, par rapport aux quatre angles :

$$0, \qquad 60°, \qquad 90°, \qquad 180°,$$

dépend de la position occupée par c dans l'un des intervalles :

$$0, \qquad a, \qquad a\sqrt{2}, \qquad 2a.$$

Or : $f(a) = a(3a - 2l)$,

$f(a\sqrt{2}) = a(5a - 2l\sqrt{2})$,

$f(2a) = a(9a - 4l)$,

$f(+\infty)$ est toujours positif.

Les valeurs remarquables de l sont donc, par grandeur

croissante :

$$a\sqrt{2}, \quad \frac{3}{2}a, \quad \frac{5\sqrt{2}}{4}a, \quad \frac{9}{4}a.$$

Il est dès lors facile de dresser un tableau de la discussion, en s'appuyant sur le théorème de séparation des racines.

Résumé de la discussion :

$-\infty < l < a\sqrt{2}$. . . solutions imaginaires.

$l = a\sqrt{2}$. . . . . une solution double $C' = C'' < 60°$.

$a\sqrt{2} < l < \frac{3a}{2}$. . . . deux solutions C' et $C'' < 60°$.

$l = \frac{3a}{2}$ . . . . . deux solutions $C' < 60°$; $C'' = 60°$.

$\frac{3a}{2} < l < \frac{5\sqrt{2}}{4}a$ . . . deux solutions $C' < 60° < C'' < 90°$.

$l = \frac{5\sqrt{2}}{4}a$ . . . . deux solutions $C' < 60°$; $C'' = 90$.

$\frac{5\sqrt{2}}{4}a < l < \frac{9}{4}a$ . . . deux solutions $C' < 60° < 90° < C''$.

$l = \frac{9}{4}a$ . . . . . une solution $C' < 60°$; $C'' = 180°$.

$\frac{9}{4}a < l < +\infty$. . . . une solution $C' < 60°$.

EXERCICES DIVERS

Par M. **Boutin**, professeur au Collège de Courdemanche.

(*Suite*, voir p. 39.)

---

103. — Maxima et minima de la fonction

$$y = \cos x + \cos 2x + \cos 3x.$$

On a $$y = \frac{1}{4}\left(\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\cos x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\cos x + \frac{1}{2}\right).$$

Multiplions le premier facteur par λ, le second par μ, λ et μ étant des indéterminées, et écrivons que la somme des facteurs est constante.

On a $$\lambda + \mu + 1 = 0.$$
Les facteurs devant être égaux, on a
$$\lambda\left(\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \mu\left(\cos x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \cos x + \frac{1}{2}.$$
L'élimination de λ, μ, entre ces trois équations, donne :
$$6\cos^2 x + 2\cos x - 1 = 0.$$
y étant continue et ne passant pas par l'infini, on voit que l'on a :

pour $x = 0$ y maximum $= 3$;

pour $\cos x = \dfrac{\sqrt{7} - 1}{6}$, $x = 74°05'$, y minimum $= -\dfrac{17 + 7\sqrt{7}}{27}$;

pour $\cos x = -\dfrac{1 + \sqrt{7}}{6}$, $x = 127°25'$, y maximum $= \dfrac{-17 + 7\sqrt{7}}{27}$;

pour $\cos x = -1$, $x = \pi$, y minimum $= -1$.

104. — Si, par un point M du plan d'un triangle, on mène les droites l, m, n respectivement parallèles aux côtés a, b, c de ce triangle, et comprises entre les côtés des angles A, B, C, on a, quel que soit M :
$$\frac{l}{a} + \frac{m}{b} + \frac{n}{c} = 2.$$

En effet $$\frac{l}{a} = 1 - \frac{x}{h}, \ldots ;$$
d'où $$\frac{l}{a} + \frac{m}{b} + \frac{n}{c} = 3 - \left(\frac{x}{h} + \frac{y}{h'} + \frac{z}{h''}\right) = 2,$$
x, y, z étant les coordonnées normales de M.

105. — Si la droite l, de l'exercice précédent, est antiparallèle avec a dans les côtés de A; m, n étant également antiparallèles avec b, c dans les côtés des angles B et C; on a, quel que soit M :
$$l \operatorname{cotg} A + m \operatorname{cotg} B + n \operatorname{cotg} C = 2R.$$
(R, rayon du cercle circonscrit à ABC.)

x, y, z étant les coordonnées normales de M, on a
$$l = z \operatorname{coséc} C + y \operatorname{coséc} B$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots ;$$
d'où
$$l \operatorname{cotg} A + m \operatorname{cotg} B + n \operatorname{cotg} C$$
$$= \frac{x \sin A + y \sin B + z \sin C}{\sin A \sin B \sin C}$$
$$= \frac{2S}{2R \sin A \sin B \sin C} = 2R.$$

106. — Si l, m, n sont respectivement perpendiculaires aux bissectrices des angles intérieurs de ABC, on a :

$$\frac{l\cos\frac{A}{2}}{r'}+\frac{m\cos\frac{B}{2}}{r''}+\frac{n\cos\frac{C}{2}}{r'''}=2\,;$$

$r'\ r''\ r'''$ désignant les rayons des cercles ex-inscrits, relatifs à ABC.

On a, dans ce cas,

$$l=\frac{y+z}{\cos\frac{A}{2}},\ldots$$

$$\frac{l\cos\frac{A}{2}}{r'}+\frac{m\cos\frac{B}{2}}{r''}+\frac{n\cos\frac{C}{2}}{r'''}=$$

$$=x\left(\frac{1}{r''}+\frac{1}{r'''}\right)+y\left(\frac{1}{r'}+\frac{1}{r'''}\right)+z\left(\frac{1}{r''}+\frac{1}{r'}\right)$$

$$=\frac{2x}{h}+\frac{2y}{h'}+\frac{2z}{h''}=2.$$

107. — Dans les mêmes conditions, l, m, n étant toujours compris entre les côtés des angles A, B, C respectivement, et menés perpendiculairement aux bissectrices extérieures des angles A, B, C; on a quel que soit M :

$$l\sin\frac{A}{2}+m\sin\frac{B}{2}+n\sin\frac{C}{2}=0.$$

En effet :

$$l\sin\frac{A}{2}=y-z,\qquad m\sin\frac{B}{2}=z-x,\qquad n\sin\frac{C}{2}=x-y.$$

108. — Dans les mêmes conditions, on mène l, m, n perpendiculaires, au côtés de ABC. On a :

$$l\ \text{séc}\ A+m\ \text{séc}\ B+n\ \text{séc}\ C=0.$$

Dans ce cas

$$l=y\ \text{séc}\ C-z\ \text{séc}\ B,$$

. . . .

$$l\ \text{séc}\ A+m\ \text{séc}\ B+n\ \text{séc}\ C=y\ \text{séc}\ A\ \text{séc}\ C-z\ \text{séc}\ A\ \text{séc}\ B$$
$$+z\ \text{séc}\ A\ \text{séc}\ B-x\ \text{séc}\ B\ \text{séc}\ C+x\ \text{séc}\ B\ \text{séc}\ C-y\ \text{séc}\ A\ \text{séc}\ C=0.$$

109. — Dans les mêmes conditions, si l, m, n sont menés parallèlement aux droites OA, OB, OC qui joignent, aux trois sommets, le centre du cercle circonscrit; on a, quel que soit M :

$$l+m+n=0.$$

En effet : $l = y \operatorname{séc} B - z \operatorname{séc} C.$

. . . .

Dans ces trois derniers exercices, il faut, évidemment, tenir compte des signes des segments l, m, n.

110. — La somme des carrés des distances d'un point quelconque d'une ellipse, aux diagonales du rectangle construit sur les axes, est une quantité constante l^2, telle que

$$\frac{2}{l^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

Il en résulte que l'ellipse est le lieu des points tels que la somme des carrés de leurs distances à deux droites fixes est constante.

Cette propriété, démontrée dans les cours de Mathématiques spéciales, peut s'établir élémentairement, comme il suit :

Soient M un point quelconque de l'ellipse; O, son centre; OA le demi-grand axe; OC, OD les diagonales du rectangle construit sur les axes. Posons $OM = \rho$, $\widehat{MOA} = \varphi$, $\widehat{COA} = \alpha$.

On a
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}.$$

Distance p de M à OC : $p = \rho \sin(\alpha - \varphi)$;
Distance q de M à OD : $q = \rho \sin(\alpha + \varphi)$.

$$p^2 + q^2 = \rho^2[\sin^2(\alpha - \varphi) + \sin^2(\alpha + \varphi)],$$
$$= 2\rho^2(\sin^2\alpha \cos^2\varphi + \cos^2\alpha \sin^2\varphi).$$

Mais, si x, y sont les coordonnées de M par rapport aux axes de la courbe :

$$x = \rho \cos\varphi, \qquad y = \rho \sin\varphi ;$$

d'où
$$p^2 + q^2 = 2[\sin^2\alpha . x^2 + y^2 \cos^2\alpha].$$

Or :
$$\sin^2\alpha = \frac{b^2}{a^2 + b^2} \qquad \cos^2\alpha = \frac{a^2}{a^2 + {}^2}.$$

Donc
$$p^2 + q^2 = \frac{2}{a^2 + b^2}(b^2x^2 + a^2y^2).$$

mais
$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 ;$$

on a donc
$$p^2 + q^2 = \frac{2a^2b^2}{a^2 + b^2} = l^2,$$

ou
$$\frac{2}{l^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

(A suivre.)

QUESTIONS D'EXAMENS

9. — Soit un triangle ABC; on prend, dans son plan, un point quelconque P; et l'on soumet ce point à trois forces représentées, en grandeurs et en directions, par les droites PA, PB, PC. Démontrer que la résultante passe par un point fixe, quel que soit le point P. (*Saint-Cyr*; p. 35.) (*)

La résultante des forces PB, PB passe par le point A', milieu de BC ; de plus, elle est égale à 2PA'. Soit A'' le milieu de PA ; la résultante cherchée a, pour direction, la diagonale du parallélogramme construit avec PA, PA' pour côtés. Cette remarque faite, on voit facilement que cette diagonale coupe AA' en un point G tel que GA' : A'A :: 1 : 2. Ce point G est donc le centre de gravité de ABC.

10. — Sur les côtés d'un triangle ABC, en leurs milieux, on applique des forces perpendiculaires à ces côtés et respectivement proportionnelles à leurs longueurs. Démontrer qu'elles se font équilibre. (*Id.*)

On observera : 1° que les forces f_1, f_2, f_3 concourent au centre du cercle circonscrit; 2° que la résultante R_3, de deux d'entre elles f_1, f_2, est égale et directement opposée à la troisième f_3.

On voit, en effet, après avoir construit le parallélogramme avec f_1, f_2, que la diagonale R_3 de ce parallélogramme forme, avec f_1 et le côté opposé à f_3, un triangle semblable à ABC ; etc.

11. — Trouver les caractères de divisibilité d'un nombre N. par 37. (*Saint-Cyr*, p. 31.)

On observe que $1000 = 37 \times 27 + 1.$
Soit $N = \ldots \alpha_3\beta_3\gamma_3\alpha_2\beta_2\gamma_2\alpha_1\beta_1\gamma_1,$
ou $N = \alpha_1\beta_1\gamma_1 + 10^3\alpha_2\beta_2\gamma_2 + 10^6\alpha_3\beta_3\gamma_3 + \ldots.$
On a
$$N = \mathfrak{M}37 + \mathfrak{R}\left(\frac{\alpha_1\beta_1\gamma_1}{37}\right) + \mathfrak{R}\left(\frac{\alpha_2\beta_2\gamma_2}{37}\right)\ldots$$
$\mathfrak{R}\left(\frac{\alpha_1\beta_1\gamma_1}{37}\right)$ représentant le reste de la division de $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ par 37, etc.

(*) La page citée correspond au Recueil des questions posées aux examens Oraux, publié par la librairie Croville-Morant.

12. — Exprimer que les racines de l'équation

$$x^2 + px + q = 0$$

ont un rapport donné K. (*Saint-Cyr*, p. 30.)

Soient x', kx' les racines en question; on a :

$$x'(1 + k) = -p,$$
$$kx'^2 = q.$$

La relation cherchée est donc :

$$q(1 + k)^2 = p^2k.$$

13. — On donne une droite xy et deux points A, B, du même coté de cette droite. Trouver, sur cette droite, un point M tel que l'angle AMx soit double de l'angle BMy.

(*Ecole Navale*, p. 55.)

Soit B′ le symétrique de B, par rapport à xy. Du point B′ comme centre, avec $\frac{B'B}{2}$ pour rayon, on décrit un cercle Δ; et, du point A, on lui mène deux tangentes qui coupent xy aux points M, M′.

Pour l'un d'eux, M, on a

$$AMx = 2BM'y;$$

pour le second, M′,

$$AM'y = 2BMx.$$

BACCALAUREAT ÈS SCIENCES COMPLET (*)

PARIS (avril 1888).

1re série. — 1° Calculer le volume d'une sphère, sachant que la différence entre ce volume et celui d'un cube inscrit à la sphère est égal à 1 mètre cube.

2° Définition du travail d'une force constante.

2e série. — 1° Construire les angles que fait, avec les plans de projection, un plan défini par ses traces.

2° Quelle valeur faut-il donner à m pour que le trinôme

$$mx^2 + (m - 1)x + m - 1$$

reste négatif, quel que soit x?

3e série. — 1° Construire les projections de l'intersection de deux plans définis par leurs tracés et passant par un même point de la ligne de terre.

2° Calculer les côtés d'un triangle, sachant que leurs longueurs sont

---

(*) Énoncés empruntés au recueil publié par la librairie Croville-Morant, 20, rue de la Sorbonne.

mesurées par 3 nombres entiers consécutifs, et que le nombre qui mesure a surface du triangle est la moitié de celui qui mesure le périmètre.

4e série. — I. On donne le rayon R d'un cercle. Exprimer, au moyen de ce rayon : 1° la surface du dodécagone régulier inscrit au cercle ; 2° la surface du dodécagone régulier circonscrit au cercle.

II. Construire l'angle d'une droite, définie par ses projections, avec la ligne de terre.

PARIS (juillet 1888).

1re série. — On donne le rayon R du quart de cercle AOB. Déterminer la distance OD de la parallèle CD au rayon OA, de telle sorte que le rapport des volumes engendrés par les triangles COD, COA, dans la rotation autour de OA soit égal à un nombre donné λ.

Indiquer les limites entre lesquelles doit être compris λ.

— Démontrer qu'une droite est perpendiculaire à un plan, lorsque ses projections sont perpendiculaires aux traces correspondantes du plan.

2e série. — 1° Un trapèze a pour bases a et b et pour hauteur h ; à quelle distance x de la base a faut-il mener une parallèle aux bases pour partager le trapèze en deux parties équivalentes ?

2° Trouver les arcs x vérifiant l'équation $\sin x + \sin 3x + \sin 5x = 0$.

3e série. — 1° Entre quelles limites doit-on faire varier x pour que, entre ces limites, l'expression

$$2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1,$$

soit constamment négative ?

2° Définir l'aplatissement de la Terre et la longueur de l'arc de 1° du méridien terrestre. Montrer que l'arc de 1° est plus long aux pôles qu'à l'équateur.

4e série. — 1° Trouver le minimum de $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 y$, sachant que l'on a : $\sin^2 x + \sin^2 y = \frac{3}{2}$. Quelles sont les valeurs correspondantes de x et de y ?

2° Démontrer que, dans la parabole, la sous-normale est constante et égale au paramètre p.

5e série. — 1° Étant donné le demi-cercle décrit sur $AB = 2R$ comme diamètre, on propose de mener une corde CD parallèle à AB, telle que si l'on fait tourner la figure autour du diamètre OP, perpendiculaire à AB, le volume engendré par la surface comprise entre les lignes OB, OP, PD et l'arc de cercle BD soit, au volume du tronc de cône de révolution engendré par le trapèze OPBD, dans un rapport donné m. Conditions pour que le problème soit possible.

2° Composition de deux forces parallèles et de sens contraires.

6e série. — 1° On donne la distance p du foyer d'une parabole à sa directrice, et l'angle α que fait avec l'axe une tangente à la courbe. On demande de calculer la longueur de la portion de cette tangente comprise entre son point de contact et le point où elle rencontre l'axe de la parabole.

2° Démontrer que le plus petit commun multiple de deux nombres est égal au produit de ces deux nombres divisé par leur plus grand commun diviseur.

7e série. — 1° Calculer la surface d'un octogone régulier inscrit à un cercle de rayon R. — Quelle serait la valeur du côté de l'octogone régulier circonscrit à ce cercle ?

2° Étant donné l'angle A et les deux côtés b et c qui le comprennent, calculer B et C.

POITIERS (juillet 1888).

1° Sur une droite indéfinie X'X, de part et d'autre d'un point fixe O, on prend deux points A', A tels que $OA' = OA = a$; puis, d'un même côté de O, deux points variables D, D', liés par la relation $\frac{DA}{DA'} = \frac{D'A'}{D'A'}$; et enfin le point P milieu de DD'. Soit $OP = x$. On exprimera d'abord les segments OD, OD', DD' en fonction de x. On prendra ensuite, sur une perpendiculaire à X'X, menée par P, une longueur $PM = \frac{DD'}{2}$, et l'on joindra le point M aux deux points F, F tels que $OF' = OF = a\sqrt{2}$. On propose de calculer les distances MF', MF, ainsi que leur différence, et d'en conclure la nature du lieu géométrique du point M, lorsque les points D, D varient.

2° Tirer la valeur de tang $\frac{x}{2}$ de l'équation $\frac{tg^2 a}{tg^2 b} = \frac{\cos b}{\cos a} \cdot \frac{\cos x - \cos a}{\cos x - \cos b}$.

QUESTION 271 (*)

Solution par A. Boutin, professeur au Collège de Courdemanche.

On considère un cercle O *et un diamètre fixe* AB, *dans ce cercle. Soit* M *un point mobile sur la circonférence* O. *Sur* AM *et* BM *comme diamètres, on décrit des circonférences* Δ, Δ'; *et, par* M *on mène une parallèle à* AB; *cette droite coupe* Δ *en* C, Δ' *en* D. *Si l'on trace les tangentes à* Δ *et* Δ' *en ces points* C *et* D, *elles se coupent en un certain point* I; *le lieu de* I *est une ellipse.* (G. L.)

Soient G, H les centres de Δ, Δ'.

Soient, aussi, MP une perpendiculaire sur AB; ILF une perpendiculaire abaissée de I sur AC et rencontrant CD en L, AB en F.

On a $\widehat{MBA} = \widehat{DMB} = \widehat{MDH}$;

donc $\widehat{IDM} = \widehat{MAB}$.

On a $\widehat{MAB} = \widehat{CMA} = \widehat{MCG}$;

puis $\widehat{ICM} = \widehat{MBA}$.

Le triangle CDI est donc rectangle en I. La figure ABCD est un rectangle; donc : CD = AB. Par suite, les triangles BMA,

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

CID sont égaux et l'on a :

$$IL = MP - LF.$$

Le point L est sur la circonférence O; ainsi

$$IL = 2FL.$$

Le point I est donc tel que ses ordonnées sont doubles de celles du cercle O; son lieu est donc une ellipse qui a pour petit axe AB et pour grand axe 2AB.

QUESTION 274

Solution par M. Emile Borel, élève en Mathématiques élémentaires au Lycée Louis-le-Grand (Sainte-Barbe).

On donne deux droites rectangulaires Ox, Oy *et un point* P; *soit* Δ *une droite quelconque passant par* P *et rencontrant* Ox, *en* A; Oy *en* B.

On élève, en P, *une perpendiculaire* Δ' *à* Δ; Δ' *rencontre :* Ox, *en* A'; Oy *en* B'. *On abaisse, de ces points* A', B', *des perpendiculaires sur* OP; *ces droites coupent* Δ *aux points* A'', B''. *Démontrer que* A''B'' = AB. (Mannheim.)

Menons à OP la perpendiculaire OK qui coupe A'B' en K; l'on a

$$(1) \quad \frac{A''B''}{A'B'} = \frac{PB''}{PB'} = \frac{PO}{KO}.$$

Les triangles semblables AOB, B'OA' donnent aussi

$$(2) \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{OB'}{OB'}$$

Mais, les triangles OPK, OKB' ayant leurs côtés perpendiculaires, chacun à chacun, sont semblables, et l'on a

$$\frac{PO}{OK} = \frac{OA}{OB'}.$$

En comparant (1) et (2) on voit que $AB = A''B''$.

Nota. — Solutions diverses par M. Himel à Alger; Germain Olivier à Montauban ; Alexandre Couvert, élève au lycée Condorcet.

QUESTION 275

Solution par M. E. Baudran, élève au Lycée de Rouen (cours de Saint Cyr)

Rendre calculable, par logarithmes, la quantité

$$\theta = \sin(x+y+z)\sin(x+2y+z) - \sin x \sin(x+y) - \sin z \sin(y+z).$$

(E. Catalan.)

On a, par application d'une formule connue,

$$2\sin(x+y+z)\sin(x+2y\ z) = \cos y - \cos(2x+3y+2z)$$
$$2\sin x \sin(x+y) = \cos y - \cos(2x+y)$$
$$2\sin z \sin(y+z) = \cos y - \cos(y+2z),$$

d'où

$$2\theta = [\cos(y+2z) - \cos(2x+3y+2z)] - [\cos y - \cos(2x+y)],$$

et, par suite

$$\theta = \sin(x+2y+2z)\sin(x+y) - \sin(x+y)\sin x.$$

Finalement, on a donc

$$\theta = 2\sin(x+y)\sin(y+z)\cos(x+y+z),$$

formule qui permet de calculer θ par logarithme,

Nota. — Solutions analogues par MM. Levieuville, professeur au collège de Dieppe; l'abbé Gelin, professeur au collège Saint-Quirin à Huy (Belgique); A. Boutin, professeur au collège de Courdemanche; Germain Olivier, à Montauban; Mineur, au lycée de Dijon; Émile Borel, élève de mathématiques élémentaires au lycée Louis-le-Grand (Sainte Barbe); Alexandre Couvert, élève au lycée Condorcet; Ignacio Beyeus, capitaine du Génie, à Cadix.

QUESTIONS PROPOSÉES

---

311. — Soient ABC, A'B'C' deux triangles *orthologiques*, et A''B''C'', A'''B'''C''',... des triangles dont les sommets divisent les droites AA', BB', CC' en parties proportionnelles. Démontrer que deux quelconques des triangles A''B''C'', A'''B'''C'''... sont orthologiques.

Soit P, le point de concours des perpendiculaires abaissées de A, B, C, sur B″C″, C″A″, A″B″; soit Q, celui des perpendiculaires abaissées de A″, B″, C″ sur BC, CA, AB. Lorsque le triangle A″B″C″ est remplacé successivement par chacun des autres A‴B‴C‴,... :

1° Le point Q décrit une droite;

2° Le point P décrit une hyperbole équilatère.

Deux triangles sont orthologiques lorsque les perpendiculaires abaissées des sommets de l'un, sur les côtés opposés de l'autre, concourent en un même point. Le théorème précédent peut être démontré soit par la géométrie pure soit par la géométrie analytique.

(J. Neuberg.)

312. — Soit M un point pris sur la base BC du triangle ABC. Si la perpendiculaire élevée en A à la droite AM, coupe en B′ et en C′ les perpendiculaires élevées respectivement à AB et à AC, en B et en C, on a

$$\frac{AB'}{AC'} \cdot \frac{MB}{MC} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}.$$

Corollaire. — Si AM est symédiane de ABC, le sommet A est le milieu de B′C′.

(d'Ocagne.)

313. — Les perpendiculaires élevées par le sommet C et par le milieu M du côté BC, à ce côté, coupent le côté AB respectivement en D et en P. La perpendiculaire élevée en C à CP coupe PM en Q. Démontrer que la droite DQ et la perdendiculaire élevée en C, à CA, se coupent sur la symédiane issue de A du triangle ABC.

(d'Ocagne.)

Le Directeur-Gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 4398-2-9.

GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE

ANGLES ET DISTANCES

Par M. **A. Boutin**, professeur au Collège de Courdemanche.

Nous réunissons, dans cette Note, quelques formules générales qui peuvent être utiles dans la solution de questions relatives au triangle.

1. Angle de deux droites. — Soit, en coordonnées *normales*, les équations des deux droites :

$$\text{(1)} \qquad Ax + By + Cz = 0,$$

$$\text{(2)} \qquad A'x + B'y + C'z = 0.$$

On sait que l'angle V de deux droites dont les équations, en coordonnées rectangulaires, sont

$$Y = aX + b, \qquad Y = a'X + b',$$

est donné par la formule :

$$\text{(A)} \qquad \operatorname{tg} V = \frac{a - a'}{1 + aa'}.$$

Prenons pour axes le côté BC du triangle de référence, et la perpendiculaire en B, à ce côté.

En désignant par h'' la hauteur correspondant au sommet C, on a

$$x = Y,$$
$$y = h'' - X \sin C - Y \cos C,$$
$$z = x \sin B - y \cos B.$$

Portons ces valeurs dans l'équation (1) : nous trouvons

$$AY + B(h'' - X \sin C - Y \cos C) + C(X \sin B - Y \cos B) = 0,$$

ou $\quad Y(A - B\cos C - C\cos B) + X(C\sin B - B\sin C) + Bh'' = 0.$

Par suite, $\quad a = \dfrac{C \sin B - B \sin C}{B \cos C + C \cos B - A}.$

De même,

$$a' = \frac{C' \sin B - B' \sin C}{B' \cos C + C' \cos B - A'}.$$

D'après cela, la formule (A) donne, tous calculs faits,

$$\operatorname{tg} V = \frac{(CB' - BC')\sin A + (AC' - CA')\sin B + (BA' - AB')\sin C}{AA' + BB' + CC' - (BC' + CB')\cos A - (AC' + CA')\cos B - (AB' + BA')\cos C}.$$

2. Conséquences. — *1° Condition de parallélisme de deux droites :*

$$(CB' - BC')\sin A + (AC' - CA')\sin B + (BA' - AB')\sin C = 0.$$

2° Condition pour que deux droites soient perpendiculaires :

$$AA' + BB' + CC' - (BC' + CB')\cos A - (AC' + CA')\cos B - (AB' + BA')\cos C = 0 \ (*).$$

3° Angle d'une droite avec l'un des côtés du triangle de référence.

On a, pour déterminer l'angle V_1 de (1) avec le côté BC :

$$\operatorname{tg} V_1 = \frac{B\sin C - C\sin B}{A - C\cos B - B\cos C}.$$

On a quelquefois besoin du sinus de cet angle; il est donné par la formule

$$\sin^2 V_1 = \frac{(B\sin C - C\sin B)^2}{(A - C\cos B - B\cos C)^2 + (B\sin C - C\sin B)^2},$$

de laquelle on tire :

$$\sin V_1 = \frac{B\sin C - C\sin B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - 2BC\cos A - 2AC\cos B - 2AB\cos C}}.$$

On a, bien entendu, deux formules analogues pour déterminer les angles que forme la même droite avec les deux autres côtés.

4° Angle des droites qui joignent un point aux sommets d'un triangle.

Soit M ce point; x, y, z désignant, comme plus haut, ses coordonnées normales, on trouve :

$$-\operatorname{cotg} BMC = \frac{R}{S}\left(\frac{yz}{x} + z\cos C + y\cos B - x\cos A\right);$$

et deux formules analogues pour les angles AMB, AMC.

3. Distance de deux points. — Soit δ cette distance, (α, β, γ) $(\alpha', \beta', \gamma')$ les coordonnées barycentriques des deux points.

On trouve aisément, pour l'équation, en coordonnées nor-

(*) Cette formule a été donnée par Painvin (G. A., t. I, p. 64), mais sous une forme inexacte. G. L.

males (x, y, z), de la droite qui joint ces deux points,

$$ax(\beta\gamma' - \beta'\gamma) + by(\gamma\alpha' - \alpha\gamma') + cz(\alpha\beta' - \beta\alpha') = 0.$$

L'angle V_1 de cette droite avec BC est, d'après la formule (3), déterminée par l'égalité

$$\sin^2 V_1 = \frac{h^2(\alpha\beta' + \alpha\gamma' - \alpha'\beta - \alpha'\gamma)^2}{\Sigma a^2(\beta\gamma' - \gamma\beta')^2 - 2\Sigma cb \cos A(\gamma\alpha' - \alpha\gamma')(\alpha\beta' - \beta\alpha')},$$

h désignant la hauteur relative au sommet A. On a, d'ailleurs,

$$\delta^2 = \frac{h^2}{\sin^2 V_1}\left(\frac{\alpha}{\Sigma\alpha} - \frac{\alpha'}{\Sigma\alpha'}\right)^2$$

$$= \frac{h^2}{\sin^2 V_1}\left(\frac{\alpha\beta' + \alpha\gamma' - \alpha'\beta - \alpha'\gamma}{\Sigma\alpha . \Sigma\alpha'}\right)^2.$$

ou

$$\delta^2 = \frac{\Sigma a^2(\beta\gamma' - \gamma\beta')^2 - \Sigma(c^2 + b^2 - a^2)(\gamma\alpha' - \alpha\gamma')(\alpha\beta' - \beta\alpha')}{(\Sigma\alpha . \Sigma\alpha')^2}.$$

Si, dans cette formule, on considère α, β, γ comme des coordonnées courantes; α', β', γ' comme celles d'un point fixe, on a l'équation d'un cercle, sous forme homogène. Cette équation, bien que d'une forme plus compliquée que celle qu'on donne habituellement, a l'avantage de mettre en évidence le centre $(\alpha', \beta', \gamma')$ et le rayon δ.

Si l'on passe aux coordonnées normales, x, y, z; x', y', z' étant celles des deux points donnés, on a :

$$\frac{S^2\delta^2}{R^2} = \Sigma(xy' - yx')^2 - 2\Sigma(zx' - xz')(xy' - yx')\cos A.$$

4. Conséquences. — 1° *Distance du centre de gravité à un point quelconque* (α, β, γ) (coordonnées barycentriques) :

$$9\delta^2 = \frac{\Sigma a^2(\beta - \gamma)^2 + \Sigma(c^2 + b^2 - a^2)(\gamma - \alpha)(\beta - \alpha)}{(\Sigma\alpha)^2}.$$

2° *Distance d'un point quelconque* (α, β, γ) *au sommet* A :

$$\rho^2 = \frac{b^2\gamma^2 + c^2\beta^2 + \beta\gamma(b^2 + c^2 - a^2)}{(\Sigma\alpha)^2};$$

ou, en coordonnées normales :

$$\rho^2 = (y^2 + z^2 + 2yz \cos A)\,\frac{4R^2}{a^2}.$$

Au moyen de ces formules, on peut trouver la distance de deux points remarquables du triangle. On pourra vérifier que

$$ON = R - 2r;$$

(O centre du cercle circonscrit, N point de Nagel.)

$$9\overline{KG}^2 = 4S\left(\frac{1}{\sin 2\theta} + \operatorname{tg}\theta\right) - 27R^2 \operatorname{tg}^2\theta.$$

(K, point de Lemoine, θ angle de Brocard.)

5. Remarque. — Nous avons trouvé plus haut, pour exprimer le carré de la distance de deux points donnés, en coordonnées normales, la formule :

$$\text{(A)}\quad \frac{16S^4\delta^2}{a^2b^2c^2} = \sum (yz_1 - zy_1)^2 - 2\sum \cos A(zx_1 - xz_1)(xy_1 - yx_1).$$

On sait que (Painvin, *Géométrie Analytique*, p. 63) δ est donné par la formule :

$$\text{(B)}\quad 4\delta^2 \cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2} = \sum (x - x_1)^2 \cos^2\frac{A}{2} - 2\sum \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}(y - y_1)(z - z_1).$$

Enfin, M. de Longchamps nous a communiqué la formule suivante, plus simple que la précédente :

$$\text{(C)}\quad \frac{1}{2}\delta^2 \sum \sin^2 A = \sum (x - x_1)^2 + \sum \cos A(y - y_1)(z - z_1).$$

Ces formules ne sont, *a priori*, nullement contradictoires; car, entre les quantités $x, y, z; x_1, y_1, z_1$, il existe les relations :

$$(\alpha)\qquad ax + by + cz = ax_1 + by_1 + cz_1 = 2S.$$

Nous nous proposons d'en vérifier l'identité :

6. Identité des trois formules. — Commençons par les formules (B) et (C).

De (α), on tire :

$$x - x_1 = \frac{1}{a}\Big[b(y_1 - y) + c(z_1 - z)\Big].$$

(B) et (C) seront identiques, si l'on a

$$8\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}\Big[\sum(x - x_1)^2 + \sum\cos A(y - y_1)(z - z_1)\Big]$$
$$= \sum\sin^2 A\Big[\sum(x - x_1)^2\cos^2\frac{A}{2} - 2\sum\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}(y - y_1)(z - z_1)\Big].$$

Si, dans cette formule, on remplace $x - x_1$ par la valeur

indiquée plus haut, on doit vérifier que

$$\frac{8\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}}{a^2}\left[(y-y_1)^2\frac{a^2+b^2+c^2}{2}+(z-z_1)^2\frac{a^2+b^2+c^2}{2}+(y-y_1)(z-z_1)(2bc+a^2\cos A-ab\cos B-ac\cos C)\right]$$

$$=\frac{\Sigma\sin^2 A}{a^2}\left[\begin{array}{l}(y-y_1)^2\left(b^2\cos^2\frac{A}{2}+a^2\cos^2\frac{B}{2}+2ab\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\right)\\ +(z-z_1)^2\left(c^2\cos^2\frac{A}{2}+a^2\cos^2\frac{C}{2}+2ac\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}\right)\\ +2(y-y_1)(z-z_1)\left(\begin{array}{l}bc\cos^2\frac{A}{2}-a^2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\\ +ab\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}+ac\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\end{array}\right)\end{array}\right].$$

D'ailleurs, $y-y_1$, $z-z_1$ étant des quantités indépendantes, on doit avoir, séparément :

$$4\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}(a^2+b^2+c^2)$$
$$=\left(b^2\cos^2\frac{A}{2}+a^2\cos^2\frac{B}{2}+2ab\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\right)\sum\sin^2 A.$$
$$4\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}(a^2+b^2+c^2)$$
$$=\left(c^2\cos^2\frac{A}{2}+a^2\cos^2\frac{C}{2}+2ac\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}\right)\sum\sin^2 A.$$
$$4\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}(2bc+a^2\cos A-ab\cos B-ac\cos C)$$
$$=\left(bc\cos^2\frac{A}{2}-a^2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+ab\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}\right.$$
$$\left.+ac\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\right)\sum\sin^2 A.$$

Si, dans ces formules, on exprime les lignes trigonométriques, en fonction des côtés, on vérifie aisément leur identité; elle entraîne celle des formules (B), (C).

Vérifions enfin l'identité des formules (A), (C).

Celle-ci peut s'écrire, en remplaçant les lignes trigonométriques par leurs expressions en fonction des côtés, et $x-x_1$ par la valeur donnée plus haut :

$$(C')\left\{\frac{4S^2\delta^2}{a^2b^2c^2}=\frac{1}{a^2}\left[(y-y_1)^2+(z-z_1)^2+2(y-y_1)(z-z_1)\cos A\right].\right.$$

D'après (α), on a

$$x = \frac{1}{a}(2S - by - cz),$$

$$x_1 = \frac{1}{a}(2S - by_1 - cz_1);$$

d'où $$zx_1 - xz_1 = \frac{1}{a}[2S(z - z_1) + b(yz_1 - zy_1)],$$

$$xy_1 - yx_1 = \frac{1}{a}[2S(y_1 - y) + c(yz_1 - zy_1)].$$

Portons ces valeurs dans la formule (A) et groupons les termes semblables. On voit aisément que les coefficients, 1° du terme $(yz_1 - zy_1)^2$, 2° du terme $(z - z_1)(yz_1 - zy_1)$, 3° du terme $(y_1 - y)(yz_1 - zy_1)$ sont identiquement nuls. Il reste alors

$$\frac{16S^4\delta^2}{a^2b^2c^2} = \frac{4S^2}{a^2}\left[(y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 + 2\cos A(y - y_1)(z - z_1)\right],$$

ce qui est identique à (C'). Les trois formules, au fond, sont donc identiques.

ESSAI

SUR LA

GÉOMÉTRIE DE LA RÈGLE ET DE L'ÉQUERRE

(SECONDE PARTIE)

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite*, voir p. 25.)

---

117. La portée des pièces ; les essais de poudres. — Voici dans quelles conditions on peut déterminer : soit, pour une hauteur donnée à la hausse, la portée maxima des différentes pièces d'artillerie ; soit, avec des pièces identiques, la force d'expansion des diverses poudres de guerre.

Une pièce à feu étant installée en un point A, au bord de la mer, le projectile est lancé, à tir perdu. Au moment où il

tombe, on voit se produire, en B, une gerbe d'eau, qui est, d'ailleurs, visible à de grandes distances; il s'agit, alors, de calculer la distance AB. Dans la pratique, on utilise les télémètres; nous voulons montrer comment on pourrait résoudre le même problème, par de simples chaînages.

Première solution. — Établissons, en C et D, deux postes d'observation; puis, traçons, au bord de la mer, une ligne PQR, jalonnée au moyen de piquets suffisamment rapprochés. Deux observateurs, placés en C et D, détermineront, sur Δ, les deux jalons P, Q respectivement en ligne droite avec le point B, d'une part, et les points C, D, d'autre part. Cela posé, voici comment on peut calculer la longueur AB que nous désignerons par x.

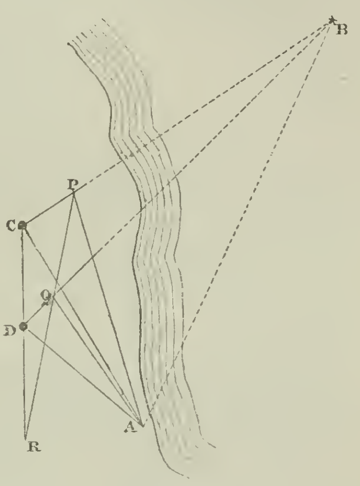


Fig. 30.

Le théorème de Stewart, appliqué au triangle ABD, donne

$$\overline{AD}^2.BQ + x^2.DQ = \overline{AQ}^2(DQ + BQ) + DQ.QB.DB$$

ou

$$(1)\quad (\overline{AQ}^2 + \overline{BQ}^2)DQ + BQ(\overline{AQ}^2 - \overline{AD}^2 + \overline{DQ}^2) = DQx^2$$

De même

$$(2)\quad (\overline{AD}^2 + \overline{BP}^2)CP + BP(\overline{AP}^2 - \overline{AC}^2 + \overline{CP}^2) = CPx^2$$

D'autre part, le triangle BCD et la transversale PQR donnent

$$(3)\qquad BP.DQ.RC = CP.BQ.RD.$$

Les égalités (1), (2) et (3) déterminent BP, BQ et x. Pour dégager l'inconnue principale, la quantité x, on devrait éliminer les inconnues auxiliaires que nous avons introduites : BP et BQ. Cette élimination n'offre aucune difficulté; elle conduit à une équation bicarrée en x. Mais la complication même de ce résultat, dans un problème qui est du premier degré, nous avertit que la marche suivie est susceptible de simplification notables. C'est ce qu'il est aisé de vérifier.

Observons, d'abord, que rien ne s'oppose à ce que la droite PQ,

qui est arbitrairement choisie, soit tracée parallèlement à CD.

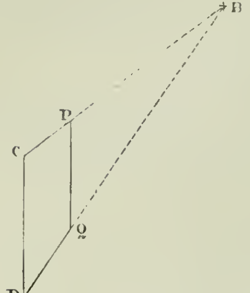


Fig. 304.

Le quadrilatère PQCD (*fig. 304*) étant un trapèze, on a

$$BP = \frac{CP.PQ}{CD - PQ},$$

$$BQ = \frac{DQ.PQ}{CD - PQ}.$$

Nous pourrons donc calculer, directement, en utilisant ces formules, les inconnues auxiliaires. Les longueurs BP, BQ une fois déterminées, la distance x s'obtient par la formule (1), ou par la formule (2), indifféremment. On a même, de la sorte, une vérification des calculs précédents.

Malgré cette remarque, la solution précédente reste compliquée; celle que nous allons développer maintenant est sensiblement plus pratique; nous allons trouver, en l'exposant, une nouvelle et intéressante application de la tranformation homologique.

Seconde solution. — Soit Az la ligne de tir; jalonnons sur le rivage une droite Ay et, sur Ay, dans la région DD′, utile aux observations, plaçons des piquets équidistants. Nous supposerons d'ailleurs qu'ils se distinguent facilement les uns des autres, par les signaux différents dont ils sont munis.

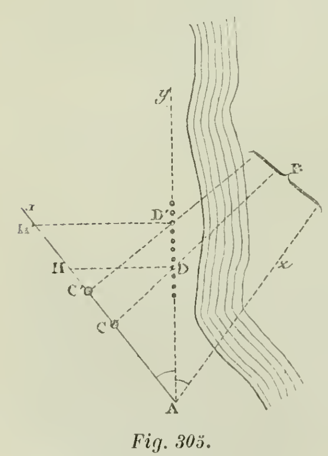


Fig. 305.

Sur une droite Ax, telle que $xAy = yAz$, installons, en C, un poste d'observation. Le projectile lancé de A tombe dans la mer et comme nous l'avons déjà dit, soulève, dans sa chute, au point B, une gerbe d'eau, visible pendant quelques secondes. L'observateur, placé en A, vérifie quel est le poteau D qui est situé sur CB. En élevant, en D, une

perpendiculaire DH, on calcule AB par la formule précédemment démontrée (§ **111**).

$$(1) \qquad \frac{1}{AB} = \frac{2}{AH} - \frac{1}{AC}.$$

Mais on simplifiera le calcul, en opérant comme nous allons l'indiquer.

Plaçons sur Ax, en C′, un second poste d'observation. Soit D′ le poteau qui se trouve sur C′B; nous avons encore

$$(2) \qquad \frac{1}{AB} = \frac{2}{AH'} - \frac{1}{AC'}.$$

Des égalités (1) et (2), on déduit

$$\frac{\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}}{\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC'}} = \frac{AH'}{AH} = \frac{AD'}{AD}.$$

On tire, de là, la formule que nous avions en vue

$$(3) \qquad \frac{1}{AB}(AD' - AD) = \frac{AD}{AC} - \frac{AD'}{AC'}.$$

On peut alors, *sans avoir à effectuer aucun tracé*, calculer la portée des pièces; les coups se succédant à intervalles aussi rapprochés que l'on voudra. Il est facile d'en voir la raison.

A chaque coup de feu, les opérateurs C, C′, prennent note du poteau qu'ils ont observé et qui correspond à la gerbe d'eau provoquée par la chute du projectile. Les expériences terminées, ils rapprochent leurs observations; puis, en opérant séparément, pour avoir une vérification des calculs, ils déterminent la longueur AB, par la formule (3). Bien entendu, les longueurs AC, AC′ ont été mesurées, une fois pour toutes, avec le plus grand soin; de plus, on connaît les distances, au point A, des différents poteaux placés sur Ay.

118. L'ouverture de la parallèle. — Supposons que AB représente un côté d'une enceinte fortifiée; par un point donné M, on propose de tracer une tranchée parallèle à AB. Ce problème nous a déjà occupé (chapitre VI, §§ **60** à **67**), mais nous y revenons, une fois encore, pour indiquer une

solution d'un caractère plus pratique, sachant, dans le cas présent, que la longueur AB est, relativement, assez faible.

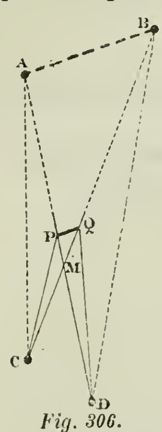


Fig. 306.

Imaginons que, dans l'espace accessible, on prenne, arbitrairement, sur les prolongements des droites AM, BM, deux points C, D. De ces points, visons, successivement, B, A; puis, traçons CP et DQ, respectivement parallèles aux lignes DB, CA; la droite PQ, ainsi obtenue, est parallèle à AB (*). Il suffit alors, de mener, par M, une parallèle à PQ ; ce tracé n'offre plus aucune difficulté puisque PQ est situé dans la région accessible.

On doit observer que la droite PQ sera dans tous les cas, aussi rapprochée que l'on voudra du point M; il suffit de choisir, les postes d'observation C, D, dans le voisinage de ce point.

(A suivre.)

EXERCICES DIVERS

Par M. **Boutin**, professeur au Collège de Courdemanche.

(*Suite*, voir p. 62.)

111. — Sur une droite OX on porte, à partir d'un point fixe O, des longueurs OA′, OB′, OC′ proportionnelles à sin 2A, sin 2B, sin 2C; A, B, C étant les angles d'un triangle; et, on fait, en A′, B′, C′, avec OX, des angles égaux aux compléments de A, B, C. Démontrer que :

(*) Cette propriété élémentaire est connue (V. l'*Educational Times* question 9681. Cette question est résolue dans le numéro d'octobre 1888 de cette publication). Elle se démontre, bien simplement, en observant que les triangles semblables de la figure considérée donnent

$$\frac{MP}{MC} = \frac{MD}{MB}, \quad \text{et} \quad \frac{MQ}{MD} = \frac{MC}{MA},$$

d'où l'on tire
$$\frac{MP}{MQ} = \frac{MA}{MB}.$$

1° Les côtés non communs de ces angles se coupent en un même point T;

2° Si TQ est perpendiculaire sur OX, TQ est proportionnelle à 2 cos A cos B cos C;

3° L'angle OTQ est l'angle φ défini par la relation :

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C;$$

4° Soit OY une perpendiculaire à OX, les droites TA', TB', TC' rencontrent OY en A", B", C". On a

$$TA'.A'A'' = TB'.B'B'' = TC'.C'C'';$$

5° Si, en A', B', C', on élève respectivement des perpendiculaires à TA', TB', TC', ces perpendiculaires coupent OY en A_1, B_1, C_1. On a :

$$A_1A'' = B_1B'' = C_1C''.$$

112. — Un point quelconque M, son complémentaire M_1, son anti-complémentaire M_2, et le centre de gravité du triangle sont quatre points en ligne droite dans, l'ordre MGM_1M_2; et l'on a

$$GM_1 = \frac{1}{2}\, GM = \frac{1}{3}\, M_1M_2.$$

113. — 1° Par le pied H de la hauteur AH d'un triangle, mener deux droites HD, HE, également inclinées sur cette hauteur et telle que le triangle HDE soit maximum.

2° Soit x l'angle AHD qui répond à la question; y, z des angles analogues pour les deux autres hauteurs; on a :

$$\operatorname{cotg} x . \operatorname{cotg} y . \operatorname{cotg} z = \operatorname{tg} A . \operatorname{tg} B . \operatorname{tg} C$$

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 y + \operatorname{tg}^2 z = 1.$$

3° Vérifier que la droite ED coupe le côté BC en un point F qui est le conjugué harmonique de H par rapport à BC.

4° Calculer l'angle EFH, de ED et du côté BC.

114. — Résoudre l'équation :

$$\sin(a + 3x) = 3 \sin(a - x).$$

On a successivement :

$$\frac{\sin(a + 3x)}{\sin(a - x)} = 3 = \frac{\sin a \cos 3x + \cos a \sin 3x}{\sin a \cos x - \cos a \sin x} = \frac{\operatorname{tg} a \cos 3x + \sin 3}{\operatorname{tg} a \cos x - \sin x};$$

d'où

$$\operatorname{tg} a = -\frac{3 \sin x + \sin 3x}{\cos 3x - 3 \cos x};$$

puis

$$\frac{1 - \operatorname{tg} a}{1 + \operatorname{tg} a} = \operatorname{tg}(45^\circ - a) = \frac{\cos 3x + \sin 3x - 3(\cos x - \sin x)}{\cos 3x - \sin 3x - 3(\cos x + \sin x)}$$
$$= \frac{4\cos^3 x - 6\cos x + 6\sin x - 4\sin^3 x}{4\cos^3 x - 6\cos x - 6\sin x + 4\sin^3 x};$$

$$\operatorname{tg}(45^\circ - a) = \frac{2(\cos^3 x - \sin^3 x) - 3(\cos x - \sin x)}{2(\cos^3 x + \sin^3 x) - 3(\cos x + \sin x)}$$
$$= \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} \cdot \frac{\cos^2 x - 2\sin x\cos x + \sin^2 x}{\cos^2 x + 2\sin x\cos x + \sin^2 x} = \frac{(\cos x - \sin x)^3}{(\cos x + \sin x)^3}$$
$$= \left(\frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}\right)^3 = \operatorname{tg}^3(45^\circ - x);$$

d'où
$$\operatorname{tg}(45^\circ - x) = \sqrt[3]{\operatorname{tg}(45^\circ - a)}.$$

115. — *Éliminer* x *et* y *entre les équations :*

$$a = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\left(1 + \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)^2} + \frac{2\operatorname{tg}\frac{y}{2}}{\left(1 + \operatorname{tg}\frac{y}{2}\right)^2},$$
$$\frac{2(a+2)}{2-a} = \cos 2x + \cos 2y,$$
$$\sin^3 x + \sin^3 y = 2m.$$

On a .
$$\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\left(1 + \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{\sin x}{1 + \sin x};$$

d'où
$$a = \frac{\sin x}{1 + \sin x} = \frac{\sin y}{1 + \sin y} = \frac{\sin x + \sin y + 2\sin x\sin y}{1 + \sin x + \sin y + \sin x\sin y},$$
$$\frac{2(2+a)}{2-a} = 2 - 2(\sin^2 x + \sin^2 y)$$
$$= 2 - 2(\sin x + \sin y)^2 + 4\sin x\sin y\,(\sin x + \sin y)^3 - 3\sin x\sin y\,(\sin x + \sin y)$$
$$= 2m.$$

Posons, pour abréger :
$$S = \sin x + \sin y, \qquad P = \sin x\sin y.$$

On est ramené à éliminer S et P entre les trois relations suivantes :

(1)
$$a = \frac{S + 2P}{1 + S + P},$$

(2)
$$\frac{2+a}{2-a} = 1 - S^2 + 2P,$$

(3)
$$S^3 - 3PS = 2m.$$

(2) donne
$$P = \frac{2a}{2-a} + S^2,$$

et alors (1) détermine S :

$$a(S^2 + 2S = 2(S + S^2)$$

d'où $1^\circ\ S = 0;$ $2^\circ\ \frac{2(1-a)}{a-2} = S.$

L'hypothèse $S = 0$ entraîne $m = 0$.

L'hypothèse $S = \frac{2(1-a)}{a-2}$ entraîne $P = \frac{a^2 - 2a + 2}{(2-a)^2}$;

puis (3) : $(1-a)(a^2 - 2a - 2) = m(a-2)^3.$

(A suivre.)

QUESTIONS D'EXAMEN

14. — Trouver les côtés d'un triangle rectangle, connaissant la hauteur h et le rayon r du cercle inscrit.

(*Saint-Cyr*, p. 22.) (*)

Soit z l'hypothénuse demandée ; x, y désignant les côtés de l'angle droit. On a

$$hz = xy,$$
$$z^2 = x^2 + y^2,$$
$$2r = x + y - z.$$

Par suite $z = \frac{2r}{h - 2r}$; $h - 2r > 0$;

etc...

15. — Rendre calculable par logarithmes

$$x = \sqrt{a^2 - b^2 \cos^2 A}.$$

(*Id.*)

1° Si l'on suppose $a < b$, on peut poser

$$a = b \cos \varphi,$$

et l'on a

$$x = b\sqrt{\cos^2 \varphi - \cos^2 A} = b\sqrt{\frac{\cos 2\varphi - \cos 2A}{2}},$$

ou $x = b\sqrt{\sin (A - \varphi) \sin (A + \varphi)}.$

2° Si l'on a, au contraire, $a > b$, on calculera l'angle auxiliaire φ', par la formule

$$b \cos A = a \cos \varphi'.$$

Dans ce cas,

$$x = a \sin \varphi'.$$

(*) Voyez la collection publiée par la librairie Croville-Morant, 20, rue de la Sorbonne.

16. — Étant données deux circonférences Δ, Δ''; on propose de mener, par un point donné M, une transversale rencontrant: Δ en A; Δ' en A'; de telle sorte que le produit MA.MA', soit égal à une quantité donnée R^2. (*École Navale*, p. 108.)

On applique la transformation par rayons vecteurs réciproques, à l'une des circonférences données.

17. — On donne une circonférence Γ et une droite Δ; par un point A, pris sur Γ, mener une transversale coupant: Γ, en B; Δ, en C; de telle sorte que

$$AB.AC = R^2.$$ (*Id.* p. 97.)

On applique encore la transformation par rayons vecteurs réciproques: soit, à Δ; soit, à Γ.

18. — Dans un triangle ABC, on abaisse, du sommet C, une perpendiculaire CH sur AB. On propose de construire ce triangle, connaissant: BC, l'angle A, et le produit BH.BA $= R^2$. (*Id.*, p. 68.)

Après avoir décrit, sur BC, l'arc capable de l'angle donné A; on transforme, par rayons vecteurs réciproques, la circonférence ainsi obtenue.

19. — Les diagonales d'un carré ABCD se coupant au point O, on prend $OA' = OB' = OC' = OD' = x$. Par les points A', B', C', D', on élève des perpendiculaires aux diagonales AC, BD; elles déterminent un carré PQRS qui sert de base à une pyramide dont les faces sont constituées par les triangles isoscèles APQ, BQR, CRS, DSP. Étudier le volume de cette pyramide. (*Id.*, p. 82.)

Le volume de la pyramide en question est

$$\frac{1}{3}x^2\sqrt{(a-x)^2 - x^2} = \frac{1}{3}x^2\sqrt{a^2 - 2ax},$$

$2a$, désignant la longueur des diagonales AC, BD; etc... le maximum a lieu pour $x = \frac{2}{5}a$.

(A suivre.)

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES COMPLET

Session d'Avril 1888.

MONTPELLIER

1re série. — Résoudre les équations

$$\cos x + \cos y = m, \quad \operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{y}{2} = n;$$

m, n désignant deux quantités données.

N.-B. — On pourra prendre, comme inconnues, $\cos x$, $\cos y$.

2e série. — Un triangle rectangle tourne autour d'une droite parallèle à l'hypoténuse et située à une distance donnée h de celle-ci.

Soient z la longueur de l'hypoténuse et u celle de la hauteur correspondante.

On propose :

1° De trouver, en fonction de h, l'expression du volume engendré;

2° De déterminer z en supposant connus : le volume engendré et l'aire du triangle donné.

3e série. — Par l'un des points d'intersection A de deux cercles donnés, de grandeur et de position, ayant pour centres respectifs O, O′, on mène une sécante CAC′ telle, que la somme des aires des triangles COA, C′O′A soit donnée. Déterminer l'angle à la base de chacun de ces deux triangles.

N.-B. — L'angle OAO′ est connu, on le désignera par θ.

4e série. — Un triangle rectangle, dont l'aire est donnée, tourne, successivement, autour de l'hypoténuse et autour des côtés de l'angle droit.

Soient V_1, V_2, V_3 les volumes ainsi engendrés; on suppose que

$$V_1 = V_2 + V_3;$$

déterminer, d'après cela, les côtés du triangle.

RENNES

1re série. — 1° Discussion des formules qui permettent de résoudre les équations simultanées

$$ax + by = c,$$
$$a'x + b'y = c'.$$

2° Dans un triangle ABC, on donne la base $BC = a$, la somme $B + C = \theta$ des deux angles à la base, et l'aire k^2 de ce triangle.

Résoudre le triangle, et discuter les conditions de possibilité, en cherchant à évaluer la différence $B - C$.

2e série. — 1° Volume engendré par un segment de cercle tournant autour d'un diamètre qui ne traverse pas sa surface. Quelle est la surface totale du corps ainsi engendré ?

2° Soient les équations.

(1) $$x^2 + px + q = 0,$$

(2) $$y^2 + \left(k + \frac{1}{k}\right)py + p^2 + q\left(k - \frac{1}{k}\right)^2 = 0,$$

et

(3) $$z^2 - zy_1 + q = 0, \qquad z^2 - zy_2 + q = 0;$$

dans lesquelles y_1, y_2 désignent les racines de (2).

1° Montrer que si (1) a des racines réelles, il en est de même des équations (2) et (3).

2° x_1, x_2 désignant les racines de (1), exprimer celles des équations (2) et (3), en fonction de x_1, x_2, et k.

3e série. — 1° Établir les formules qui permettent de calculer le rayon R et l'apothème A d'un polygone régulier, de périmètre donné, connaissant le rayon r et l'apothème a du polygone régulier de même périmètre, mais dont le nombre des côtés est moitié moindre. Prouver que l'on a

$$\mathrm{R} - \mathrm{A} < \frac{r - a}{4}.$$

2° Résoudre, par rapport à x, y les équations

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = a \cos 3\alpha,$$
$$x \sin \alpha - y \cos \alpha = 3a \sin 3\alpha,$$

et déterminer les valeurs de α pour lesquelles $x^2 + y^2$ a la plus grande ou la plus petite valeur possible.

4e série. — 1° Résolution de l'équation bicarrée. Condition pour que les racines soient réelles, ou imaginaires de la forme $\beta\sqrt{-1}$, ou imaginaires de la forme $\alpha + \beta\sqrt{-1}$.

1° Dans une circonférence de rayon a, on trace une corde AA′, laquelle est vue, du centre, sous l'angle 2α. Trouver, sur la circonférence, un point M tel que

$$\overline{\mathrm{MA}}^2 + \overline{\mathrm{MA}'}^2 = 4m^2.$$

Déterminer le maximum ou le minimum de m^2.

N.-B. — On prendra pour inconnue l'angle $\mathrm{MOA} = x$.

ADMISSION A L'ÉCOLE FORESTIÈRE

CONCOURS DE 1888

COMPOSITIONS ÉCRITES

Mathématiques.

1. — a et b désignant les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle, h la hauteur perpendiculaire sur l'hypoténuse, prouver la relation

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

En conclure le moyen de construire, géométriquement, la longueur h

donnée par la relation

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \dots + \frac{1}{l^2},$$

où a, b ... l sont des longueurs données, en nombre quelconque.

II. — Un voyageur doit se rendre du point A au point C par la voie ferrée AX et par une voie partant d'un point indéterminé B de AX et se dirigeant vers le point C. On demande de déterminer le point B de façon que sa dépense soit minima, sachant que, payant place entière sur la voie BC, le voyageur paie seulement $\frac{1}{n}$ du tarif sur la voie AX.

On interprétera toutes les solutions, et l'on examinera spécialement les cas de $n = \infty$ et de $n = 1$.

Trigonométrie et calcul logarithmique.

I. — Trouver la différence de hauteur de deux points inaccessibles.

II. — On donne, dans un triangle, les trois hauteurs :

$$h = 12{,}566^{m}{,}368,$$
$$h' = 9{,}424^{m}{,}776,$$
$$h'' = 7{,}539^{m}{,}8208.$$

On demande les côtés et les angles.

Nota. — A partir du 1er janvier 1889, tous les élèves de l'École nationale Forestière, se recruteront parmi les élèves diplômés de l'Institut national Agronomique.

INSTITUT NATIONAL AGRONOMIQUE

Première Session. — Octobre 1888.

I. — Les bases d'un tronc de cône et sa surface latérale touchent une sphère de rayon a; le contact de la sphère et de la surface a lieu tout le long d'un cercle : en d'autres termes, la sphère et la surface latérale du tronc sont circonscrites l'une à l'autre. On demande :

1° D'évaluer le volume du tronc en fonction du rayon a et du rayon R de l'une des bases du tronc ;

3° D'évaluer la surface latérale de ce tronc, en fonction des mêmes quantités;

3° De déterminer le rayon R de l'une des bases du tronc, de telle sorte que la surface de cette base, augmentée de la surface latérale du tronc donne un résultat minimum ;

4° Le tronc qui répond à ce minimum touche la sphère suivant un cercle C dont on demande de calculer le rayon en fonction de a;

5° Enfin, on demande d'évaluer les volumes des segments déterminés dans la sphère, par le plan du cercle en fonction de a.

II. — Quelle somme d'argent faut-il déposer chaque année, chez un banquier, pour obtenir, au bout de 30 ans, un capital de 150000 francs.

On supposera que la première annuité est payée immédiatement et que le capital de 150000 francs ne sera touché qu'un an après le dépôt de la dernière annuité.

Le taux de l'intérêt est supposé égal à 3.5 0/0.

Deuxième Session. — Novembre 1888.

I. — Calculer le sinus de 15° 23′ 35″.12, à l'aide des tables de logarithmes.

II. — Un tronc de cône a pour bases un grand cercle d'une sphère de rayon R et un petit cercle de la même sphère dont le rayon est r. On demande de calculer le volume et la surface latérale de ce tronc.

III. — Du tronc de cône en question, on retranche le volume d'un cône ayant la même hauteur que le tronc et pour base le cercle de rayon r qui sert de base au tronc. On demande de déterminer r de manière que ce reste soit le plus grand possible.

BIBLIOGRAPHIE

A Sequel to the first six books of the Element of Euclid containing an easy introduction to modern Geometry, with numerous exemples by *John Casey* LL. D., F. R. S. Fifth edition, revised and enlarged Dublin : Hodges, Figgis and C°, Grafton Street, 104. — London : Longmanns. Green and C°.) Price : 3 sh. 6 d. = 4 fr. 40.

Avant d'aborder l'étude de la Géométrie supérieure, il est nécessaire de posséder certaines connaissances élémentaires qui permettent de comprendre facilement les grandes théories que l'on se propose d'étudier dans la suite. A ce point de vue l'ouvrage de M. Casey peut être considéré comme une *Introduction* aux ouvrages de Poncelet, Chasles, Salmon et Townsend. La rapidité avec laquelle se sont succédé les éditions de *A Sequel to Euclid* montre le succès qu'a obtenu cet ouvrage. La première édition a paru en 1881, la seconde en 1882, la troisième en 1884, la quatrième en 1886, enfin la cinquième en décembre 1888; et l'on peut prédire, sans crainte de se tromper, qu'elle sera suivie de beaucoup d'autres. Le livre de M. Casey est un mélange de *Théorèmes et de problèmes;* il peut être comparé au traité classique de M. Catalan (*); il possède les mêmes qualités : il est simple, clair, concis; et, sous un petit volume, renferme beaucoup de faits. Dans les 248 pages qui forment le volume, on trouve la démonstration de 201 propositions. Beaucoup de théorèmes sont démontrés de plusieurs manières différentes, et la plupart d'entre eux sont suivis de nombreux corollaires formant un intéressant complément aux matières développées dans le corps du volume. De nombreux exercices suivent chacune des grandes divisions du livre. Ils sont judicieusement choisis et, par leur variété, permettent au lecteur de se familiariser rapidement avec les propositions et les théories nouvelles

---

(*) *Théorèmes et Problèmes de Géométrie élémentaire*, par Eugène Catalan, 6e édition; Dunod, éditeur.

exposées dans le cours de l'ouvrage. Souvent M. Casey indique les résultats auxquels on doit parvenir; parfois aussi, il donne un aperçu sommaire de la démonstration.

L'ouvrage est divisé en six livres, subdivisés eux-mêmes en sections. Les quatre premiers livres traitent de problèmes particuliers sur les points en ligne droite, les droites concourantes, les maxima et minima, les cercles orthogonaux, les axes radicaux, les constructions de triangles, les propriétés élémentaires des pôles et des polaires, le centre des moyennes distances.

... Cette partie est surtout remarquable par les démonstrations nouvelles que donne l'auteur.

Le livre six (le cinquième n'existe pas) divisé en huit sections, est le plus important; il comprend : 1° des additions aux matières traitées précédemment; 2° les centres de similitude; 3° la théorie de la division harmonique; 4° théorie de l'inversion; 5° les cercles ayant même axe radical; 6° théorie du rapport anharmonique; 7° théorie des pôles, polaires, et des polaires réciproques; 8° exercices divers. Dans ce livre, l'auteur s'est attaché à simplifier, à rendre élégantes et élémentaires les théories et les démonstrations données par Chasles, Salmon et Townsend. Nous signalerons encore, comme particulièrement remarquable et intéressante, la solution du problème de Malfatti (pages 151-155), la généralisation du théorème de Fuerbach par le Dr Hart (p. 106-107), le théorème de Miquel (p. 151-152).

L'ouvrage se termine par un chapitre supplémentaire consacré à la géométrie récente. Ce chapitre (83 pages) est celui qui a reçu le plus de modifications dans les diverses éditions du *A sequel to Euclid*, et cela tient aux progrès incessants de cette branche des mathématiques. L'auteur étudie d'abord les points inverses, les points réciproques, les symédianes, le point de Lemoine et l'angle de Brocard. Il donne ensuite la théorie de deux figures directement semblables, puis la théorie d'un système de trois figures, d'où il déduit, comme cas particuliers, les propriétés des points et triangles de Brocard; puis les cercles célèbres, ceux de Brecard, de Tucker, de Lemoine, de Taylor, le cercle des neuf points, etc. M. John Casey passe ensuite à la théorie des polygones harmoniques et des figures associées dont les développements, comme l'on sait, sont dus en grande partie à MM. Neuberg, Tarry et Simmons. Comme on le voit, M. Casey donne d'abord les méthodes générales d'où il conclut les propriétés particulières du triangle; cette méthode est plus élégante que celle de M. Simmons (voir *Companion to the weekly problem papers* de M. Milne). Celle-ci va du simple au général, mais elle est moins élémentaire (*).

Ceux qui connaissent l'éminent Géomètre, qui, depuis trente ans, fait autorité dans les universités de la Grande-Bretagne, pourront vérifier que le *A Sequel to Euclid* est à la hauteur de la réputation du maître. Nous espé-

(*) La traduction en français, du chapitre supplémentaire se rapportant à la géométrie élémentaire récente, a paru dans le numéro de janvier-février 1889 de *Mathésis*. On ne saurait trop remercier les rédacteurs de ce recueil mathématique, MM. P. Mansion et J. Neuberg, de leur excellente idée. Les amis de la Géométrie du triangle leur sauront gré de leurs efforts continuels pour faire connaître et prospérer cette science si pleine d'intérêt et si féconde.

rons que la nouvelle édition de ce livre, dont la réputation n'est plus à faire, sera, comme elle le mérite, favorablement accueillie et justement appréciée par les professeurs et les élèves ; tous peuvent être persuadés qu'ils ne regretteront pas le temps qu'ils auront consacré à la lecture de ce précieux ouvrage.

E. VIGARIÉ.

Nous appelons l'attention de nos lecteurs, candidats au baccalauréat ès sciences, sur la publication suivante qui vient de paraître à la librairie Croville Morant, 20, rue de la Sorbonne. Chacune des brochures annoncées se vend séparément.

NOUVELLES ANNALES SCIENTIFIQUES
ET LITTÉRAIRES
DU BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES
(Énoncés des questions de Mathématiques et de Physique avec Solutions et Discussions des Problèmes
Textes et traductions des Versions latines.)

Session de novembre 1888.

Académie d'Aix, Lille, Poitiers, Rennes ; chacune 0 fr. 50 c. ;
Académie d'Alger, Toulouse, 0 fr. 25 c. ;
Académie de Besançon, Bordeaux, Caen, Dijon, Grenoble, Nancy ; 0 fr. 75 c
Académie de Clermont, Lyon, Montpellier, 1 fr. ;
Académie de Paris, 2 francs.

Mathématiques et Mathématiciens, Pensées et Curiosités recueillies par *A. Rebière*. — Paris, librairie Nony, rue des Écoles, 17. — Un vol. in-8°. Prix franco : 3 fr. 50 et sur Hollande : 7 fr. 50.

QUESTIONS 261 ET 305

Solution par M. E. VIGARIÉ, étudiant à la Faculté des sciences de Toulouse

Si l'on mène, par les trois sommets d'un triangle, des droites faisant, avec un axe quelconque du plan de ce triangle, des angles égaux et de sens contraire, respectivement à ceux que font les hauteurs avec cet axe ; les trois droites, ainsi menées, concourent en un même point, situé sur le cercle circonscrit au triangle.

Existe-t-il trois droites concourantes, respectivement issues des sommets du triangle, autres que les hauteurs, et telles que les droites analogues à celles de l'énoncé précédent soient également concourantes ? (d'Ocagne.)

Soient A′B′C′ un triangle, H′, H″ H‴ les pieds des hauteurs,

et H leur point de concours. Désignons par α, β, γ les points où une droite Δ rencontre les hauteurs. Menons les droites $B'\beta'$ $C'\gamma'$ faisant, avec Δ, des angles égaux à ceux que font $B'\beta$, $C'\gamma$ avec Δ, et en sens contraires. Ces droites se coupent en M. Dans les triangles semblables $\beta'M\gamma'$, $\beta H\gamma$ les angles en M, H sont égaux ; or l'angle en H étant le supplémentaire de l'angle A'. il en est de même de l'angle M. Les droites $A'\alpha'$, $B'\beta'$, $C'\gamma$ concourent donc en un même point M situé sur le cercle circonscrit ABC. L'angle en M est égal à l'angle A' ou à son supplément, suivant que le point M se trouve sur les arcs B'A'C' ou B'C'N. Donc *pour que trois droites quelconques concourant en* H, *donnent, par la construction indiquée dans l'énoncé, un point du cercle circonscrit, il faut et il suffit que l'angle* B'HC' *soit égal à l'angle* A' *ou à son supplément ; il faut, par conséquent, que le point* H *soit, lui-même, un point du cercle circonscrit.*

Considérons maintenant le triangle ABC, obtenu en menant. par les sommets de A'B'C', des parallèles aux côtés opposés. Nous observons qu'un côté quelconque, A'C' par exemple, a pour symétrique, par rapport à Δ, la droite $B\gamma'$; on obtient donc ainsi la proposition suivante, en observant que le cercle A'B'C' est le cercle des neuf points du triangle ABC :

Par les milieux A', B', C' *des côtés d'un triangle quelconque* ABC, *on mène les symétriques de* BC, CA, AB, *par rapport à une direction donnée* Δ. *Ces trois droites concourent en un point du cercle des neuf points du triangle* ABC.

C'est l'énoncé de la question 305, proposée par M. Lemoine.

NOTA. — Autre solution par M. I. Beyens, capitaine du Génie, à Cadix.

QUESTION 280

Solution par G. LAVIEUVILLE, professeur au Collège de Dieppe.

On a

$$(a + c)(a + 2c) \ldots (a + nc) + (-1)^{n-1}(b + c)(b + 2c) \ldots (b + nc) = \mathfrak{M}[a + b + (n + 1)c].$$

(Catalan.)

En effet, remplaçons a par

$$-[b + (n + 1)c],$$

le premier membre de l'égalité à vérifier devient:

$$(-1)^n(b+nc)\ldots(b+2c)(b+c)+(-1)^{n-1}(b+c)(b+2c)\ldots(b+nc),$$

quantité identiquement nulle.

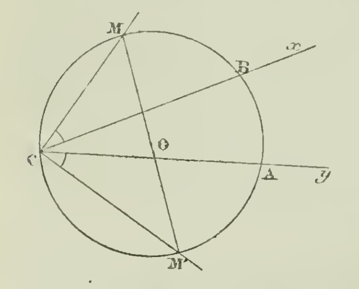
Nota. — Solutions analogues par MM. Ignacio Beyens, capitaine du génie, à Cadix; Henry Galopeau, étudiant à Bordeaux; A. Boutin, professeur au collège de Courdemanche.

QUESTION 281

Solution par M. Al. Couvert, élève au lycée Condorcet.

On donne un angle xCy. Par le sommet de cet angle, on fait passer une circonférence quelconque Δ; et l'on joint, par une droite, les points A, B où elle rencontre les côtés de l'angle. Le diamètre parallèle à cette droite coupe Δ en deux points M, M′ dont on demande le lieu, lorsqu'on fait varier cette courbe.

(Mannheim.)



Traçons CM et CM′. Les arcs AM′, BM étant égaux, on a

$$\text{BCM} + \text{ACM}' + \gamma\text{OX} = 2\text{BCM} + \gamma\text{OX} = 1^d.$$

Ainsi, ACM′ et BCM sont des anglesconstants, etc..,

Nota. — Solutions analogues par MM. G. Lavieuville, professeur au collège de Dieppe; E. Baudran, élève du cours de Saint-Cyr, au collège de Dieppe; A Boutin, professeur au collège de Courdemanche.

QUESTIONS PROPOSÉES

314. — Trois points A,B,C se meuvent uniformément sur trois droites données dans un même plan.

Démontrer, *géométriquement*, que le sommet c d'un triangle

abc, semblable au triangle ABC et ayant une base fixe *ab* décrit une circonférence.

Lorsque, sans changer les vitesses des mobiles, on déplace parallèlement à elle-même la droite parcourue par C, la circonférence décrite par *c* passe par un point fixe.

(*J. Neuberg.*)

315. — Soient : A'B'C' un triangle quelconque, circonscrit au triangle ABC ; O_a, O_b, O_c les centres des cercles A'BC, B'CA, C'AB ; O'_a, O'_b, O'_c les symétriques des points O_a, O_b, O_c par rapport à BC, CA, AB. Démontrer :

1° Que les triangles $O_a O_b O_c$, $O'_a O'_b O'_c$ sont symétriquement semblables ;

2° Qu'ils ont même orthocentre.

(*J. Neuberg.*)

316. — On coupe un prisme triangulaire par tous les plans faisant avec celui de la section droite un angle donné. Démontrer que les côtés *a*, *b*, *c* de l'une quelconque des sections vérifient une relation de la forme

$$Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 = D,$$

A, B, C, D étant des constantes.

(*J. Neuberg.*)

317. — Soient une circonférence Δ et deux diamètres rectangulaires Δ', Δ''. D'un point M, de Δ, on abaisse des perpendiculaires MP', MP'' sur ces diamètres : soient P le pôle de la droite P'P'', par rapport à Δ ; P le pôle de la droite P'P'', par rapport à Δ ; Q, R, ses projections sur $\Delta'\Delta''$.

Démontrer que QR est tangente à Δ. (*G. L.*)

318. — Étant donnés un triangle et une droite Δ, soient P, Q, R les prejections, d'un point quelconque M, de Δ, sur les côtés de ABC. Démontrer :

1° Que les angles de PQR vérifient constamment une relation de la forme

$$p \operatorname{cotg} P + q \operatorname{cotg} Q + r \operatorname{cotg} R = 1 ;$$

2° Que, si l'on construit sur une base fixe P'Q' un triangle

P'Q'R' semblable à PQR, le point R' décrit une circonférence.

(J. Neuberg.)

319. — Dans tout quadrilatère convexe, dont les angles sont A, B, C, D:

1° $$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\cos\frac{D}{2}=\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{C+A}{2};$$

2° $$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{D}{2}=\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{C+A}{2};$$

3° $$\sin\frac{A+B}{2}\left[\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{D}{2}\right]=\sin\frac{B+C}{2}\left[\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{D}{2}\sin\frac{A}{2}\right];$$

4° $$\sin\frac{A+B}{2}\left[\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2}\right]=\sin\frac{B+C}{2}\left[\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\cos\frac{D}{2}\cos\frac{A}{2}\right];$$

5° $$2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{C+D}{2}=-\sin\frac{A}{2}\sin\left(C+\frac{B+D}{2}\right)+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{B+C}{2}+\sin\frac{D}{2}\sin\frac{C+D}{2}.$$

(E. Catalan.)

320. — Soient AA', BB' deux médianes du triangle ABC; démontrer que les cercles décrits sur AA' et BB' comme diamètres ont pour axe radical la hauteur de ABC qui correspond au sommet C. *(S. Rindi.)*

(Question empruntée au *Periodico di Matematica*, numéro d'octobre 1887.)

Le Directeur Gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 6030-3-9.

NOTE SUR LE PROBLÈME DU MYOSOTIS

Par M. **d'Ocagne.**

Je veux simplement faire voir comment la considération de la symédiane permet de résoudre immédiatement ce problème célèbre dont une solution a été donnée dans ce journal (t. I, p. 40) et qui s'énonce ainsi :

On forme une ligne polygonale $A_0A_1A_2A_3\ldots$ *dont tous les angles sont égaux et dont les côtés successifs forment une progression géométrique décroissante* $\frac{A_0A_1}{A_1A_2} = \frac{A_1A_2}{A_2A_3} = \frac{A_2A_3}{A_3A_4}\ldots$ *Trouver le point limite de cette ligne polygonale* (qui a reçu le nom de myosotis).

Les triangles $A_0A_1A_2$ et $A_1A_2A_3$ sont semblables, par hypothèse ; donc les angles faits par la symédiane issue de A_1, dans $A_0A_1A_2$, avec les côtés A_1A_0 et A_1A_2 sont respectivement égaux aux angles faits par la symédiane issue de A_2, dans $A_1A_2A_3$, avec les côtés A_2A_1 et A_2A_3. Il en résulte que si ces deux symédianes se coupent en L et que H_0 et H_1 soient les pieds des perpendiculaires abaissées de L, sur A_0A_1 et A_1A_2, les triangles LH_0A_1 et LH_1A_2 sont semblables. Mais, en vertu d'une propriété fondamentale de la symédiane, on a

$$\frac{LH_0}{LH_1} = \frac{A_0A_1}{A_1A_2};$$

et, par suite
$$\frac{LA_1}{LA_2} = \frac{A_0A_1}{A_1A_2} = \frac{A_1A_2}{A_2A_3}.$$

De là résulte la similitude des triangles LA_1A_2 et LA_2A_3.

Ainsi,
$$\widehat{LA_2A_1} = \widehat{LA_3A_2},$$

et, par conséquent
$$\widehat{LA_2A_3} = \widehat{LA_3A_4}.$$

En outre,
$$\frac{LA_2}{LA_3} = \frac{A_1A_2}{A_2A_3} = \frac{A_2A_3}{A_3A_4}.$$

Du point L, abaissons, sur A_2A_3 et A_3A_4, les perpendiculaires LH_2 et LH_3. Les triangles LA_2H_2 et LA_3H_3 sont semblables puisqu'ils ont leurs trois angles égaux chacun à chacun ; donc $\frac{LH_2}{LH_3} = \frac{LA_2}{LA_3} = \frac{A_2A_3}{A_3A_4}$, ce qui prouve que le point L appartient

à la symédiane issue de A_3 dans le triangle $A_2A_3A_4$. Il suit de là que *les symédianes, issues des sommets intermédiaires, de tous les triangles formés par trois sommets consécutifs du myosotis concourent au point* L. Comme, d'autre part, la surface du triangle LA_nA_{n+1} décroît indéfiniment, on voit que c'est le point L qui est le point limite cherché.

Il est d'ailleurs, de toute évidence, que les côtés du myosotis sont vus, du point L, sous un même angle, supplément de celui que font entre eux ses côtés successifs. Nous avons montré, en effet, que les angles LA_1A_0 et LA_2A_1 sont égaux. Donc
$$\widehat{A_1LA_2}=\pi-(\widehat{LA_1A_2}+\widehat{LA_2A_1})=\pi-(\widehat{LA_1A_2}+\widehat{LA_1A_0})=\pi-\widehat{A_0A_1A_2}.$$

De là résulte que le cercle circonscrit au triangle A_1A_2L est tangent en A_1 à A_0A_1 et en A_2 à A_2A_3. En d'autres termes : *tous les cercles ayant pour corde un côté du myosotis et pour tangentes, aux extrémités de cette corde, les côtés adjacents passent par le point limite.*

Puisque A_1L est symédiane du triangle $A_0A_1A_2$ nous déduisons de là que *l'axe radical du cercle passant par* A_2 *et tangent en* A_1 *à* A_0A_1, *et du cercle passant par* A_0 *et tangent en* A_1, *à* A_1A_2, *est la symédiane issue de* A_1 *du triangle* $A_0A_1A_2$.

Nous retrouvons ainsi, indirectement, une propriété de la symédiane que nous avons déjà signalée ailleurs (*Nouv. Ann. de Math.*, 1885, p. 366).

DEMONSTRATION

D'UN THÉORÈME D'ARITHMÉTIQUE (*)

La formule des combinaisons conduit, comme on sait, à cette position :

Le produit de p *nombres entiers consécutifs est toujours divisible par le produit des* p *premiers nombres.*

Voici une façon simple et peut-être restée inaperçue d'établir ce théorème, directement.

(*) Voyez une autre démonstration : *Journal* 1881 ; p. 147.

Admettons que le théorème soit vérifié pour $p - 1$ facteurs; nous allons montrer qu'il est vrai pour p facteurs.

Posons

$$U_n = (n + 1)(n + 2) \dots (n + p - 1)(n + p).$$

Nous avons donc

$$U_n = p\,(n + 1)(n + 2) \dots (n + p - 1) \\ +(n + 1)(n + 2) \dots (n + p - 1)\,n.$$

Le premier produit est exactement divisible par $1, 2 \dots p$, puisque $(n + 1)(n + 2) \dots (n + p - 1)$ est divisible par $1, 2 \dots (p - 1)$; le théorème, avons-nous dit, étant vérifié pour $(p - 1)$ facteurs.

Il suffit donc d'établir que le second produit

$$U_{n-1} = n(n + 1)(n + 2) \dots (n + p - 1)$$

est divisible par $1, 2 \dots p$.

En comparant U_n, U_{n-1}, on voit que l'expression U_{n-1} se déduit de U_n par le changement de n en $n - 1$.

Le même raisonnement, reproduit sur U_{n-1}, prouve que U_{n-1} est divisible par $1, 2 \dots p$, en même temps que U_{n-2}; et ainsi de suite. On arrive finalement à reconnaître, que U_n est divisible par $1, 2 \dots v$, si la fonction

$$U_1 = 1, 2 \dots p,$$

est, elle-même, divisible par $1, 2 \dots p$; condition manifestement remplie.

Le théorème étant vrai pour $p = 2$, est donc établi pour toutes les valeurs entières de p.

***

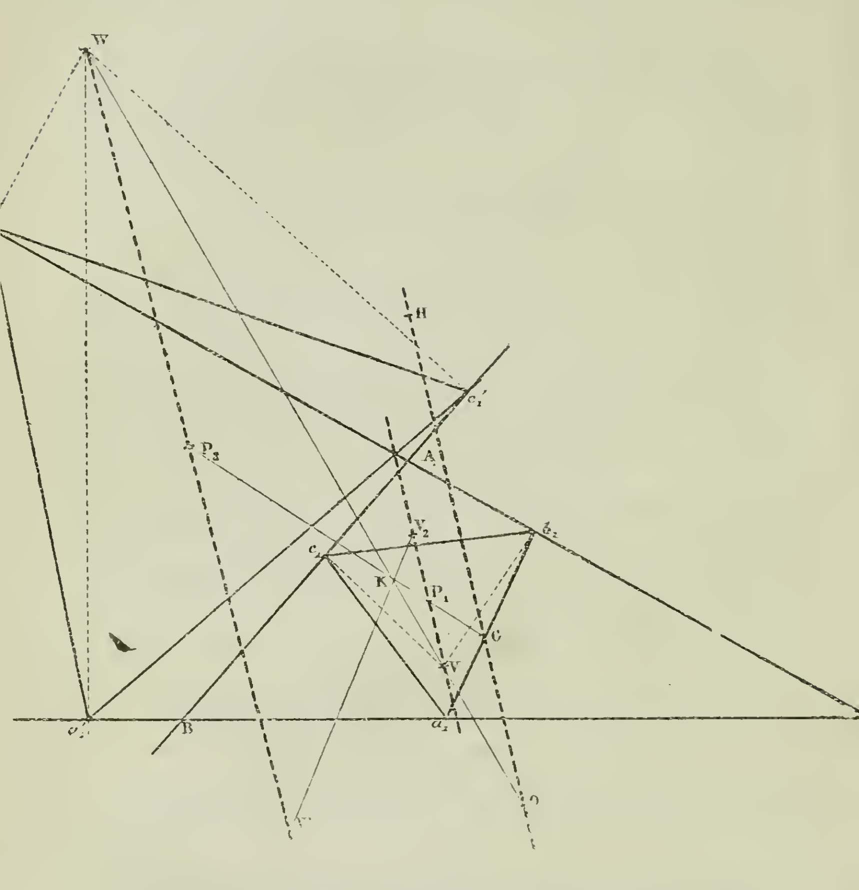
SUR LES CENTRES ISODYNAMIQUES

ET SUR LES CENTRES ISOGONES

Par M. **A. Boutin**, professeur au Collège de Courdemanche.

Définitions. — On appelle *centres isodynamiques* d'un triangle ABC, les deux points communs aux cercles d'Apollonius, c'est-à-dire aux cercles qui ont pour diamètre la distance des pieds des bissectrices du même angle. L'un de ces points est toujours à l'intérieur du cercle circonscrit à ABC, nous

l'appellerons *premier centre isodynamique*, et nous le désignerons par V. L'autre est toujours à l'extérieur du même cercle, nous l'appellerons *second centre isodynamique*, et nous le désignerons par W.



Le *premier centre isogone* est le point d'où les trois côtés du triangle sont vus sous le même angle 120°; nous le désignerons par V_2; le *second centre isogone* est le point d'où deux côtés sont vus sous l'angle 60° et le troisième sous l'angle 120°: nous le désignerons par W_2.

Les deux centres isodynamiques sont tripolairement associés, il en est de même des deux centres isogones, c'est-à-dire que l'on a:

$$\frac{VA}{WA} = \frac{VB}{WB} = \frac{VC}{WC},$$
$$\frac{V_2A}{W_2A} = \frac{V_2B}{W_2B} = \frac{V_2C}{W_2C}.$$

Les coordonnées barycentriques de ces points sont :

(V) $\alpha:\beta:\gamma = \sin A \cos(A-30^\circ):\sin B \cos(B-30^\circ):\sin C \cos(C-30^\circ)$,

(W) $\alpha:\beta:\gamma = \sin A \cos(A+30^\circ):\sin B \cos(B+30^\circ):\sin C \cos(C+30^\circ)$,

$$(V_2)\ \alpha:\beta:\gamma = \frac{\sin A}{\cos(A-30^\circ)}:\frac{\sin B}{\cos(B-30^\circ)}:\frac{\sin C}{\cos(C-30^\circ)}$$
$$(W_2)\ \alpha:\beta:\gamma = \frac{\sin A}{\cos(A+30^\circ)}:\frac{\sin B}{\cos(B+30^\circ)}:\frac{\sin C}{\cos(C+30^\circ)}.$$

Les centres isogones sont les inverses des centres isodynamiques.

On appelle *cercles de Schoute* le lieu des points tels que si chacun d'eux est projeté orthogonalement sur les côtés de ABC, en A_1, B_1, C_1 tous ces triangles $A_1 B_1 C_1$ ont même angle de Brocard θ_1.

Le lieu géométrique des centres des cercles de Schoute est le diamètre de Brocard, ligne droite qui joint le centre du cercle circonscrit O au point de Lemoine K.

En désignant par ρ le rayon d'un cercle de Schoute, on a

$$\rho^2 = \frac{R^2 \sin^2\theta(1-4\sin^2\theta_1)}{\sin^2(\theta+\theta_1)}$$
$$= \frac{4R^2 \sin^2\theta \sin(30^\circ-\theta_1)\sin(30^\circ+\theta_1)}{\sin^2(\theta+\theta_1)}.$$

Dans cette formule (je ne sais si elle a été donnée) : R est le rayon du cercle circonscrit, θ est l'angle de Brocard de ABC; enfin, θ_1 désigne l'angle de Brocard, correspondant au cercle de Schoute.

I. — *Trouver dans le plan d'un triangle* ABC, *deux points tels que les triangles obtenus en les projetant sur les côtés de* ABC *soient équilatéraux.*

La relation $\theta = 30^\circ$ entraîne pour un triangle l'égalité des côtés. Les points cherchés appartiennent donc aux cercles de

Schoute correspondant à la valeur $\theta_1 = \pm 30°$. Mais pour cette valeur ρ s'annule, et le cercle correspondant se réduit à son centre: les points cherchés sont donc les centres des cercles de Schoute dont les rayons sont nuls.

L'équation générale des cercles de Schoute, en coordonnées normales, est:

$$\Sigma yz \sin(A - \theta_1) - \sin\theta_1 \Sigma x^2 = 0.$$

Dans le cas où $\theta_1 = 30°$, on a

$$\Sigma yz \sin(A - 30°) - \sin 30° \, \Sigma x^2 = 0.$$

Les équations du centre sont:

$$\frac{1}{a}\left[y \sin(C - 30°) + z \sin(B - 30°) - x\right]$$
$$= \frac{1}{b}\left[x \sin(C - 30°) + z \sin(A - 30°) - y\right]$$
$$= \frac{1}{c}\left[x \sin(B - 30°) + y \sin(A - 30°) - z\right];$$

ce qui donne, pour les coordonnées normales d'un des points cherchés:

$$x : y : z = \cos(A - 30°) : \cos(B + 30°) : \cos(C - 30°).$$

Ce point est le premier centre isodynamique V. D'ailleurs, ρ s'annule pour $\theta_1 = -30°$; on a donc

$$x : y : z = \cos(A + 30°) : \cos(B + 30°) : \cos(C + 30°);$$

formules permettant de calculer les coordonnées du second centre isodynamique W.

Nous appellerons premier triangle podaire équilatéral celui qui est relatif à V; second triangle podaire équilatéral celui qui est relatif à W. *(A suivre.)*

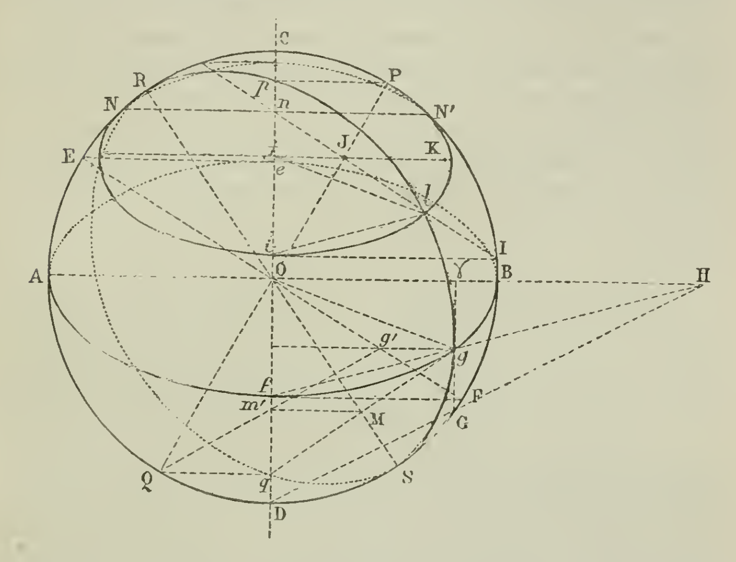
LES PROJECTIONS POLYÉDRIQUES (*)

Projection orthographique horizontale. — Soit à construire la projection orthographique de la surface terrestre sur le plan horizontal d'un lieu donné quelconque. Nous sup-

(*) Cette note est empruntée à l'ouvrage de M. Porchon, *Cours de Cosmographie,* à l'usage des aspirants au Baccalauréat ès sciences et des candidats aux écoles du Gouvernement. (Félix Alcan, éditeur; 108, boulevard Saint-Germain). Les projections polyédriques ont été récemment intro-

poserons ce plan horizontal mené par le centre de la terre : c'est notre plan horizontal de projection.

La base de l'hémisphère dont le lieu donné est le pôle géométrique se projette horizontalement en vraie grandeur suivant le cercle ACBD : le centre O est la projection du lieu. Le plan méridien du lieu, que nous appellerons *premier méridien*, étant perpendiculaire au plan de l'horizon, nous le



prendrons pour le plan vertical de projection; sa trace horizontale CD servira de ligne de terre. CD est, à la fois, la projection horizontale de l'axe terrestre et celle du premier méridien. La projection verticale de l'axe terrestre sera la droite PQ faisant avec CD un angle égal à la latitude du lieu considéré.

Projection des pôles. — Les projections verticales des pôles sont les points P et Q, et leurs projections horizontales sont les pieds p et q des lignes de rappel passant par ces points.

---

duites dans les programmes des examens d'admission à l'école de Saint-Cyr. Quelques uns de nos lecteurs liront avec intérêt cet article, dont la fin sera publiée dans le prochain numéro du journal. MM. Porchon et Alcan nous ont gracieusement autorisé à faire cet emprunt à leur ouvrage; nous leur adressons ici tous nos remerciments. G. L.

Projections de l'équateur. — Le plan de l'équateur étant perpendiculaire à la ligne des pôles, ses traces seront les perpendiculaires AB et EF aux projections de cette ligne. Ainsi AB est le grand axe de la projection horizontale de l'équateur, et *ef*, projection horizontale de EF, en est le petit axe.

Construisons maintenant la projection horizontale d'un point quelconque de l'équateur, en nous donnant sa longitude. A cet effet, rabattons l'équateur sur le plan horizontal, autour de sa trace AB : ce rabattement coïncidera avec le cercle ABCD. L'origine des longitudes sera D; et, en prenant l'arc DG égal à la longitude donnée, G sera le rabattement du point dont nous cherchons la projection. Or, le point *f*F étant rabattu en D, la droite DGH a pour projection *f*H, puisque H, étant sur l'axe AB, reste fixe. Donc la perpendiculaire Gγ à AB donne, par sa rencontre en *g* avec *f*H, le projection cherchée.

Projection des parallèles. — Tout parallèle étant perpendiculaire à l'axe terrestre, ses traces seront perpendiculaires l'une à PQ, l'autre à *pq*. D'ailleurs le premier méridien étant en vraie grandeur dans le plan vertical, si l'on prend l'arc FI égal à la latitude, on aura, en I, le point où le parallèle rencontre le premier méridien; et dès lors les traces sont IJ et NN'. Les projections du centre du parallèle sont J et *j*; les axes de la projection horizontale sont dirigées suivant les droites rectangulaires *j*K et *j*O : la longueur du premier égale JI, et celle du second est *ji*, projection de JI. D'ailleurs, les parties vues et cachées de ce parallèle sont séparées par NN', qui est la trace horizontale; et, aux points N et N', la projection du parallèle est tangente au cercle ACBD, le plan tangent à la sphère, en chacun de ces points, étant vertical.

Il nous reste à construire un point L du parallèle, connaissant la longitude. Pour cela, nous commençons par faire la projection du point G de l'équateur, qui a même longitude que le point L. Il est clair que, dans l'espace, JL est parallèle à OG; donc *jl* est parallèle à O*g*. De même, les droites *il* et *fg* sont parallèles; d'où résulte le point *l*. Il faut remarquer d'ailleurs que les projections du parallèle et de l'équateur

sont homothétiques, et que, par suite, les droites lg qui joignent deux points homologues quelconques vont concourir sur pq.

Projection des méridiens. — La construction des méridiens par points résulte des tracés précédents, puisque nous pouvons construire autant de points que nous voulons, en nous en donnant la longitude.

Mais il reste à déterminer les axes des ellipses méridiennes. Le grand axe de l'ellipse $plgq$ est la trace horizontale du plan de la méridienne. O est un point de cette trace ; cherchons-en un second, par exemple la trace de la droite projetée en qg. Or, q est projeté verticalement en Q, et la projection verticale de G est en g', à l'intersection de EF et de la ligne de rappel de g. Donc la projection verticale de la trace cherchée est le point m' où Qg' rencontre CD, et cette trace elle-même M est à l'intersection de gq et de la ligne de rappel du point m'. Enfin le grand axe de l'ellipse méridienne est ROMS.

Le petit axe s'obtient sans difficulté par le moyen connu ; puisque le cercle principal de cette ellipse est ACBD, et que l'on connaît par exemple l'un des points p de l'ellipse.

Projections polyédriques ou polycentriques. — Dans ce système, qui se rattache au projections orthographiques, on partage la surface terrestre en parties de faible étendue, et l'on projette orthographiquement chacune d'elles sur le plan tangent mené, au globe terrestre, par le centre de cette partie. Ainsi, les projections sont faites sur la surface d'un polyèdre circonscrit à la sphère. Les différentes cartes ainsi obtenues représentent fidèlement, tant pour la forme que pour l'étendue, chaque petite portion de la terre, mais ne peuvent se raccorder entre elles, puisque la surface du polyèdre de projection n'est pas développable.

Le canevas de chaque carte résulte de la construction expliquée à l'article précédent. Mais, à cause de l'exiguïté de la région, il vaut mieux se servir de formules pour le tracé des parallèles et des méridiens, formules que nous établirons plus loin.

Le Ministère de l'Intérieur publie actuellement un système de carte de France, construite d'après ce principe, et à l'échelle de $\frac{1}{100000}$. Le territoire est partagé en 500 *coupures géographiques* environ, par des méridiens et des parallèles espacés les uns de 30′, les autres de 15′. En conséquence, les dimensions des cartes varient avec la latitude.

Théoriquement les cercles géographiques sont projetés suivant des ellipses. Seul le méridien central de chaque coupure se projette suivant une droite qui est l'axe de la carte. Mais, en réalité, la courbure des méridiens est inappréciable : ce sont des droites très peu inclinées par rapport à l'axe. Les parallèles sont représentés par des arcs sensiblement circulaires, ayant 0.3 de millimètre de flèche sur 374 millimètres de longueur, en moyenne.

Bien que les feuilles, suivant la théorie, ne puissent se raccorder parfaitement entre elles, on parvient, grâce à l'extensibilité du papier, à les assembler sans difficulté, par 16 ou 24, pour la constitution des cartes départementales.

On construit les nouvelles cartes au moyen de celles de l'État Major, que l'on découpe en petits fragments et que l'on adapte au canevas des projections polyédriques. Chaque feuille est ainsi formée, sur une planchette rigide, par une marqueterie dont les différentes pièces se raccordent très sensiblement. D'ailleurs on contrôle et l'on corrige, au besoin, d'après les formules, la position de certains points de repère. Enfin, on réduit le tout à l'échelle de $\frac{1}{100000}$ par la photographie, et la réduction est livrée au graveur.

Depuis quelques années, les projections polyédriques sont en faveur. Plusieurs États de l'Allemagne, l'Autriche, l'Italie, l'Espagne, ont construit leurs cartes de détail d'après ce système. *(A suivre.)*

RECHERCHE SUR LES CARACTÈRES DE DIVISIBILITÉ
D'UN NOMBRE ENTIER
par 7, 9, 11, 13, 37, 73, 101, 137.

La méthode indiquée récemment (*Journal*, p. 66) pour trouver un caractère de divisibilité par 37, est susceptible de plusieurs applications intéressantes. Nous en signalerons ici quelques-unes.

D'une façon générale, nous poserons,

$$N = \dots a_7 a_6 a_5 a_4 a_3 a_2 a_1.$$

N est le nombre que nous étudions ; a_1, désigne le chiffre des unités ; a_2, celui des dizaines, etc.

1° Divisibilité par 9. — On a

$$9 + 1 = 10;$$

et, après avoir observé que

$$N = a_1 + 10a_2 + 10^2a_3 + \dots,$$

on voit que

$$\frac{N}{9} = E + \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots}{9}$$

E désignant un nombre entier, etc.

2° Divisibilité par 11. — On prend, pour point de départ de la démonstration, l'égalité

$$11 \times 9 + 1 = 100.$$

On écrit N sous la forme :

$$10^2 a_4 a_3 + a_2 a_1.$$

et l'on a

$$\frac{N}{11} = E + \frac{a_2 a_1}{11} + \frac{a_4 a_3}{11} + \dots$$

D'ailleurs le reste, par 11, d'un nombre de deux chiffres, tel que uv, est égal à $u - v$. On conclut, de là, la règle ordinaire qui permet de calculer le reste de la division, par 11, du nombre N.

L'exposition précédente, comme on le voit, ne diffère, que par la forme, des démonstrations classiques. Mais on peut donner par application de la même idée, d'autres caractères de divisibilité, moins évidents. C'est ce que nous allons montrer.

Divisibilité par 37. — Reprenons le nombre 37, considéré dans la Note citée.

On a trouvé $37 \times 27 = 1000 - 1$.

L'égalité

$$N = a_3a_2a_1 + 1000a_6a_5a_4 + \overline{1000}^2a_9a_8a_7 + \ldots$$

donne

$$N = \mathfrak{M}37 + a_3a_2a_1 + a_6a_5a_4 + \ldots;$$

et, par suite,

$$\frac{N}{37} = E + \frac{3.a_3a_2a_1}{111} + \frac{3.a_6a_5a_4}{111} + \ldots$$

D'ailleurs, le reste de la division d'un nombre pqr (r chiffre des unités, q chiffre des dizaines, p chiffre des centaines), par 111, est le même que celui de $qr - 11p$.

En appliquant cette remarque aux diverses fractions

$$\frac{a_3a_2a_1}{111}, \quad \frac{a_6a_5a_4}{111}, \ldots$$

on est conduit à la règle suivante :

Règle. — *Pour reconnaître si un nombre* N *est divisible par* 37, *on le partage, en allant de droite à gauche, successivement, en tranches ayant : deux chiffres pour la première ; un chiffre pour la deuxième ; deux chiffres pour la troisième, etc.*

Cela fait, de la somme des tranches de deux chiffres, on retranche onze *fois la somme des tranches n'ayant qu'un chiffre.*

Le nombre ainsi obtenu, divisé par 37, *donne un reste égal à celui qui correspond à la division de* N *par* 37.

Mais prenons maintenant des exemples plus compliqués.

Divisibilité par 7 et par 13. — Nous observerons que

$$7 \times 11 \times 13 = 1001;$$

et que

$$1001 \times 999 = 1\,000\,000 - 1 = 10^6 - 1.$$

En écrivant

$$N = a_6a_5a_4a_3a_2a_1 + 10^6\,a_{12}a_{11}a_{10}a_9a_8a_7 + \ldots.$$

nous avons

$$\frac{N}{1001} = E + \frac{a_6\ldots a_1}{1001} + \frac{a_{12}\ldots a_7}{1001} + \ldots$$

D'ailleurs, le reste de la division d'un nombre

$$abca'b'c',$$

par 1001 est égal à

$$a'b'c' - abc.$$

De là, nous concluons la règle suivante :

Règle. — *Pour calculer le reste de la division d'un nombre* N, *par l'un des nombres* 7, 11, *ou* 13; *on le partage, à partir de la droite, en tranches de trois chiffres. De la somme des tranches de rang impair, on soustrait celle des tranches de rang pair; le reste de la différence obtenue par le diviseur considéré est égal au reste de la division de* N *par ce nombre* (*).

Divisibilité par 101. — On a

$$101.99 = 10^4 - 1.$$

Écrivons N sous la forme

$$a_4a_8a_2a_1 + 10^4a_8a_7a_6a_5 + \ldots$$

Nous aurons

$$N = \mathfrak{M}101 + a_4a_3a_2a_1 + a_8a_7a_6a_5 + \ldots$$

Par conséquent, le reste de la division de N, par 101, est donné par la formule

$$\mathfrak{R}\frac{N}{101} = \mathfrak{R}\frac{a_4a_3a_2a_1}{101} + \mathfrak{R}\frac{a_8a_7a_6a_5}{101} + \ldots$$

Mais on a

$$\mathfrak{R}\frac{\alpha\beta\gamma\delta}{101} = \mathfrak{R}\frac{101\alpha\beta + \gamma\delta - \alpha\beta}{101} = \mathfrak{R}\frac{\gamma\delta - \alpha\beta}{101}.$$

De cette remarque, résulte la règle suivante.

RÈGLE. — *Pour obtenir le reste de la division d'un nombre* N *par* 101, *partager le nombre en tranches de deux chiffres, à partir de la droite; la somme des tranches de rang impair, diminuée de celle des tranches de rang pair, donne un nombre qui, divisé par* 101, *fait connaître le reste cherché.*

Divisibilité par 73 et par 137. — On observe que

$$137 \times 73 = 10001\,;$$

et l'on a, par conséquent

$$137 \times 73 \times 9999 = 10^8 - 1$$

(*) Comparer avec les règles connues pour la divisibilité par 7.
Le caractère de divisibilité par 7, 13, 37 que nous indiquons ici, a été donné par Ch. Simon, *Précis d'arithmétique*, 1868, p. 87 et, bien probablement, par plusieurs auteurs antérieurs.

En reproduisant le raisonnement précédent, on est conduit à une règle ayant la plus complète analogie avec celle que nous avons indiquée pour les diviseurs que nous avons successivement considérés. Il faut seulement partager, en allant de droite à gauche, le nombre en tranches de quatre chiffres, etc.

On peut multiplier, presque indéfiniment, ces applications. Elles n'ont d'autre mérite que de rattacher à une seule et même idée les caractères de divisibilité d'un nombre, par plusieurs diviseurs ; et cette idée même n'est pas nouvelle. On trouvera d'ailleurs, dans un article de M. Loir, que nous publierons dans le prochain numéro, une règle générale pour trouver le caractère de divisibilité par un nombre premier quelconque Cette règle est remarquablement commode, toutes les fois que la quantité x qui précède les trois derniers chiffres 001, n'est pas compliquée. Les exemples traités dans cette Note, ont été choisis de façon à obtenir $x = 1$; c'est, dans cette série, le cas le plus simple.

ESSAI
SUR LA
GÉOMÉTRIE DE LA RÈGLE ET DE L'ÉQUERRE
(SECONDE PARTIE)

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite*, voir p. 78.)

CHAPITRE XI

LE POINT INACCESSIBLE DANS L'ESPACE

Lorsque le point inaccessible A est situé dans l'espace, on peut se proposer de déterminer diverses longueurs se rattachant à ce point : sa hauteur au-dessus du plan de l'horizon. ou, encore sa distance à la terre. Lorsqu'ils sont mobiles; on peut demander leur vitesse moyenne, etc.

Il convient d'observer que, au point de vue pratique, le problème actuel soulève des difficultés de différents genres, suivant la nature du point inaccessible considéré. En effet' tantôt ce point sera le sommet d'une tour ou le point culminant d'une montagne; tantôt il représente un ballon fixe ou mobile; dans d'autres cas, un nuage, une étoile filante ou un bolide, etc. De là résulte la nécessité de solutions variées, appropriées à ces différents cas; nous allons, dans ce chapitre, exposer quelques unes d'entre elles.

119. La hauteur de la tour. — Ayant fixé, en PQ, verticalement, une mire d'une hauteur connue h, l'observateur se place en O de façon que, en visant l'extrémité de la mire, il perçoive le point S, sommet de la tour.

Mais il y a lieu de distinguer deux cas, suivant que le pied de la tour est inaccessible ou non.

1° Dans la première hypothèse on relève les longueurs O'P, O'A et, après avoir posé $OO' = h'$, $SH = x$, on a

$$\frac{x - h'}{h - h'} = \frac{O'A + r}{O'P}.$$

Cette équation, dans laquelle r désigne le rayon de la tour, permet de calucler la hauteur inconnue x. Il est vrai qu'il faut connaître le rayon r; mais, nous indiquerons tout à l'heure différents procédés pour le déterminer, soit dans le cas où le pied de la tour est accessible, soit dans l'autre hypothèse.

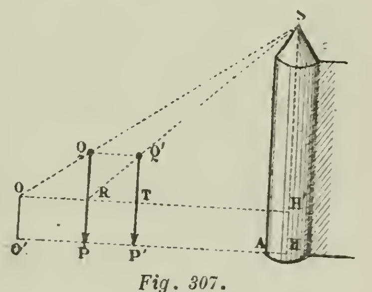


Fig. 307.

D'ailleurs, dans les solutions que nous allons maintenant exposer, la connaissance de r est inutile. On doit ajouter que l'on peut éviter cette difficulté, relative à la détermination de r, en visant, comme le réprésente la figure 308, un point H de la circonférence supérieure de la tour.

2° Supposons maintenant que le pied de la tour soit inaccessible.

L'observateur se transporte en P; puis, un aide déplace la mire et la fixe en P'Q' de façon que son extrémité Q' vienne, de nouveau, se placer sur la ligne RS qui va de l'œil de l'observateur, dans sa nouvelle position, au sommet de la tour.

Les triangles semblables : RQ'T, RSH', d'une part; OQR, OSH', d'autre part; donnent

$$\frac{x - h'}{h - h'} = \frac{\mathrm{RH'}}{\mathrm{RT}} = \frac{\mathrm{OH'}}{\mathrm{OR}},$$

d'où
$$\frac{x - h'}{h - h'} = \frac{\mathrm{OR}}{\mathrm{OR - RT}} = \frac{\mathrm{O'P}}{\mathrm{O'P - PP'}}.$$

C'est l'égalité qu'on doit employer pour calculer x; on observera qu'elle présente, sur la précédente, l'avantage de ne pas renfermer l'expression du rayon de la tour.

120. La méthode du miroir. — Au premier livre de la Géométrie pratique du R. P. Millet Dechales, ouvrage que nous avons déjà cité (§ **19**, *note*), on trouve l'exposition, devenue classique, d'une méthode intitulée *modus metiendi lineas per capottricam*, permettant d'évaluer la hauteur d'une tour dont le pied est accessible.

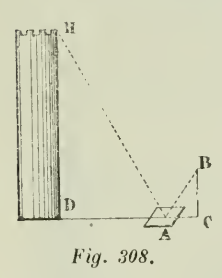


Fig. 308.

A une distance a du pied de la tour, on dispose, sur le sol, un miroir A; l'observateur se place alors en BC, de façon que l'œil aperçoive, dans le miroir, l'image du sommet H de la tour.

Les triangles semblables HAD, BAC donnent, en posant HD $= x$

$$x = a.\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}}.$$

121. Le rayon de la tour. — 1° Supposons que le pied de la tour soit accessible.

On jalonne trois alignements tangents à la tour, BC, CA, AB; on peut ensuite mesurer les distances a, b, c; puis appliquer la formule connue

$$\text{(A)}\quad r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

Dans le cas où le triangle ABC, dont il vient d'être question, est rectangle en A, la formule précédente se simplifie et l'on a

$$r = \frac{b + c - a}{2}.$$

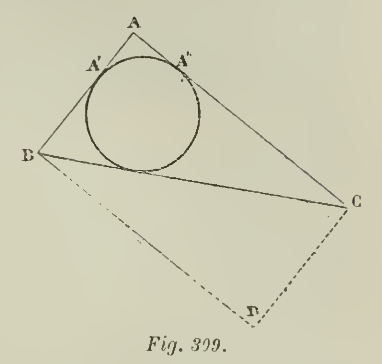


Fig. 309.

D'ailleurs, les longueurs AA′ = AA″ représentent le rayon cherché. Mais cette dernière méthode, malgré sa simplicité apparente, ne détermine pas bien le rayon cherché, parce que les points de contact A′, A″ ne sont pas connus avec une précision suffisante. Mais, voici un procédé qui nous paraît avantageux.

Ayant mené, à la tour, dans le plan horizontal, des tangentes parallèles Δ, Δ′, la distance CD de ces droites représente le diamètre de la tour. La seule difficulté est de trouver deux points A, B diamétralement opposés. A cet effet, on entoure la base de la tour d'un cordeau qu'on replie ensuite sur lui-même de façon à la partager en deux parties égales; en fixant de nouveau la partie obtenue de telle sorte qu'elle repose exactement sur la circonférence de base de la tour, les extrémités obtenues représentent deux points diamétralement opposés (*).

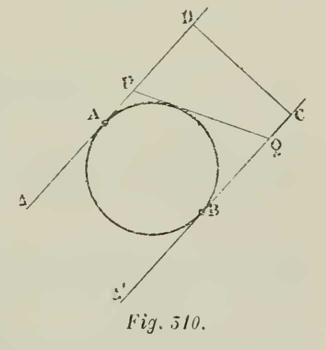


Fig. 310.

On pourrait aussi jalonner une droite PQ tangente à la base de la tour et observer que le rayon de celle-ci est, par une propriété bien connue, égale à $\sqrt{AP.BQ}$. Les solutions du pro-

(*) Ce procédé (fort peu mathématique, procédé d'ouvrier si l'on veut) serait particulièrement pratique pour calculer le diamètre d'un bassin, parce que, après avoir déterminé les points A, B diamétralement opposés, on pourra tendre un cordeau divisé de A en B, par dessus le bassin.

blème actuel sont très nombreuses (*); mais celles que nous venons d'indiquer, sont, croyons-nous, les plus simples.

2° Supposons que le pied de la tour soit inaccessible. (**)

Après avoir fixé trois jalons, A, B, C, de telle sorte que les lignes de visée BC, CA, AB soient tangentes à la base de la tour, on mène par les points A, B, C des parallèles aux lignes BC, CA, AB.

On détermine ainsi un triangle A′B′C′ dont les côtés peuvent être mesurés sans qu'il soit nécessaire de pénétrer dans la région qui est voisine de la tour; le rayon du cercle inscrit à A′B′C′ peut être calculé par diverses méthodes et, notamment, au moyen de la formule (A); il est égal au diamètre de la tour.

Si l'on s'accorde l'usage de l'équerre ordinaire, on pourra jalonner, dans la partie accessible, deux droites parallèles, tangentes à la base de la tour; la distance de ces deux parallèles représente le diamètre de celle-ci.

(A suivre.)

BIBLIOGRAPHIE

Arpentage, levé des plans, nivellement, tracé des routes, par *F. J.* 3me édition; A. Mame, à Tours; Poussielgues frères, à Paris, éditeurs.

Cette troisième édition d'un ouvrage appartenant à une collection dont nous avons eu, plus d'une fois, l'occasion de faire l'éloge, dans ce journal, comporte, relativement aux précédentes, plusieurs améliorations. Nous signalerons, notamment, l'introduction de quelques notions sommaires sur la *Topographie*. On sait que, depuis 1882, la lecture des cartes topographiques fait partie du programme de la Géométrie descriptive, pour l'enseignement spécial. Par ce côté, et par beaucoup d'autres, le livre en question mérite tout particulièrement de fixer l'attention des profes-

---

(*) On peut, par exemple, jalonner, comme l'indique la *fig. 309*, les droites BD, CD parallèles, respectivement, à CA, BA; puis mesurer les hauteurs h, h', h'' du triangle BDC; le rayon r est donné par l'égalité

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h} + \frac{1}{h'} + \frac{1}{h''}.$$

Ce procédé exige plusieurs jalonnements, mais il deviendrait assez commode, si l'on faisait usage de la table des inverses.

(**) Nous examinons plus loin le cas où le pied est, tout à la fois, inaccessible et invisible.

seurs et des élèves de cet ordre d'enseignement. Il s'adresse aussi, il est superflu de le faire remarquer, à tous ceux qui se destinent aux bureaux des Ponts et Chaussées, aux Chemins de fer, etc. Bien rédigér orné de figures nombreuses et gravées avec le plus grand soin, ce traité de Géométrie pratique mérite le succès qu'il a obtenu et que nous constatons avec plaisir. Nous le recommandons iustamment à ceux de nos lecteurs que le sujet qu'il traite peut intéresser. G. L.

NOTE SUR LA QUESTION 269

Par M. **E. Vigarié.**

On sait (Voir J. E. 1886, pp. 195, 222) que :

I. — Si l'on fait tourner les deux faisceaux de Brocard (ΩA, ΩB, ΩC) (Ω'A, Ω'B, Ω'C), autour de leurs centres, d'un même angle θ et en sens contraires, les rayons rencontrent les côtés correspondants de ABC en six points α, β, γ, α', β', γ' d'un même cercle de Tucker.

II. — Les triangles α, β, γ. α', β', γ' sont égaux entre eux et semblables à ABC, chacun d'eux a, avec ABC, un point de Brocard commun ; la question 269 est un cas particulier de ces théorèmes généraux.

En effet, si nous prenons

$$\theta = 90 - \omega,$$

ω désignant l'angle de Brocard, les points α, β, γ, α', β', γ', deviennent les projections orthogonales de Ω, Ω', sur les côtés de ABC. Donc :

Si, des points de Brocard Ω, Ω', on abaisse des perpendiculaires sur les côtés; les triangles α, β, γ, α', β', γ' sont égaux; de plus ils sont semblables à ABC.

Le cercle $\alpha\beta\gamma\alpha'\beta'\gamma'$ est un cercle de Tucker remarquable :

1° Son équation barycentrique est :

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)^2} \Sigma\alpha\Sigma b^2c^2\alpha[(b^2c^2 - a^4) + (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)] - \Sigma a^2\beta\gamma = 0.$$

2° Son rayon ρ est

$$\rho = R \sin \omega.$$

3° Son centre est au milieu de $\Omega\Omega'$;

4° C'est le cercle principal de l'ellipse de Brocard ;

5° C'est le plus petit cercle de Tucker, correspondant au triangle ABC ;

. . . .

NOTE SUR LA QUESTION 261

M. d'Ocagne nous écrit :

« La seconde partie de la solution insérée pour la question 261 est inexacte ; elle ne répond pas, d'ailleurs, à la question que j'ai posée.

» Il ne s'agissait pas de trouver un point qui donnât par la construction indiquée *un point du cercle circonscrit*, mais bien *trois droites concourantes* sans imposer aucune condition à leur point de concours. En outre, il est inexact de dire que la construction, appliquée à un point du cercle circonscrit, donne un autre point du cercle circonscrit. Il y a là une inadvertance de la part de l'auteur de la solution, dont on connaît d'ailleurs l'habileté, particulièrement dans les questions de la géométrie du triangle.

» Cette seconde partie de la question 261 peut être précisée ainsi :

» Généralisant un peu une définition due à M. Tucker, on peut dire que *deux droites sont isocéliennes, par rapport à une certaine direction, lorsqu'elles forment, avec toute parallèle à cette direction, un triangle isoscèle.*

» Il est, d'ailleurs, évident que si deux droites sont isocéliennes par rapport à une direction, elles le sont aussi par rapport à la direction perpendiculaire.

» Cela posé, je substituerai à la seconde partie de l'énoncé de la question 261, le suivant :

» *Étant donnés un triangle* ABC *et un point* M, *déterminer une direction telle que les isocéliennes, par rapport à cette direction*

menées respectivement par A, B, C, *des droites* AM, BM, CM, *concourent en un même point.*

» *Existe-t il des positions du point* M, *pour lesquelles la direction répondant à cette condition puisse être prise arbitrairement?*

» On trouve que le point M doit alors coïncider avec le point de concours des hauteurs. »

Nota. — La solution de M. Beyens, simplement mentionnée dans le numéro d'avril, répondait exactement à la seconde partie de la question 261. La faute qui s'est glissée dans la solution insérée nous a été également signalée par M. Louis Bénézech, de Cette, qui démontre même l'impossibilité de l'existence, pour un point du cercle circonscrit, de la propriété en question. G. L.

QUESTIONS D'EXAMENS

20. — Si les quantités :

$$\frac{1}{a+b}, \frac{1}{a+c}, \frac{1}{b+c},$$

sont trois termes consécutifs d'une progression arithmétique, cette propriété appartient aussi aux quantités

$$a^2, b^2, c^2 \text{ (*)}.$$ (*Saint-Cyr*, p. 94.)

L'égalité

$$\frac{2}{a+c} = \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c},$$

donne immédiatement

$$2b^2 = a^2 + c^2.$$

21. — Démontrer que le nombre

$$N = 2^{2n} + 15n - 1$$

est toujours un multiple de 9. *(Id.)*

Pour $n = 1$, on a $N = 18$; la propriété se trouve vérifiée dans ce cas particulier. Supposons donc que N soit un multiple de 9, et démontrons que

$$N' = 2^{2n+2} + 15(n+1) - 1$$

est aussi un multiple de 9.

On a, en effet,

$$4N - N' = 45n - 18$$

ou

$$N' = 4N + 9(2 - 5n).$$

Puisque N est un multiple de 9, N', jouit de la même propriété.

(*) La page citée correspond au recueil des questions posées aux examens oraux, publié par la librairie Croville-Morant.

On peut trouver beaucoup d'autres propositions du même genre ; elles s'établissent, soit par le raisonnement précédent, qui est général ; soit par des procédés différents.

Par exemple : l'égalité

$$2^{3n} + (-1)^{n-1} = \mathfrak{M}.9$$

peut se démontrer directement en observant que

$$2^3 = 9 - 1,$$

égalité de laquelle on conclut la proposée, en élevant les deux membres à la puissance n.

On observera qu'avec les égalités :

$$2^{2n} + 15n - 1 = \mathfrak{M}.9,$$
$$2^{3n} + (-1)^{n-1} = \mathfrak{M}.9,$$

on peut, en les combinant, en produire plusieurs autres. Telle est, pour en citer un exemple, l'égalité

$$2^n(15n - 1) + (-1)^n = \mathfrak{M}.9;$$

etc.

22. — Si, dans un triangle, l'aire S est donné par la formule

$$S = p(p - a),$$

le triangle est un rectangle. *(Id.)*

En effet, l'égalité

$$p(p-a)(p-b)(p-c) = p^2(p-a)^2,$$

donne

$$(p-b)(p-c) = p(p-a),$$

ou

$$2bc = (b+c+a)(b+c-a),$$

ou, enfin

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

23. — Vérifier l'identité

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - \sin a}{1 - \sin a}}.$$

(Id., p. 93.)

On peut observer que la quantité soumise au radical est

$$\left(\frac{\sin\frac{a}{2} - \cos\frac{a}{2}}{\sin\frac{a}{2} + \cos\frac{a}{2}}\right)^2,$$

etc.

QUESTIONS PROPOSÉES

321. — Étant donné un triangle ABC, soit I le point de rencontre de la conjuguée harmonique de la hauteur AH par rapport aux côtés AB et AC, et de la parallèle menée par le milieu M de BC à la bissectrice, intérieure ou extérieure, de l'angle

BAC. Démontrer que si la perpendiculaire menée par I à BC coupe AB en B′ et AC en C′, on a BB′ = CC′. *(d'Ocagne.)*

322. — Soient F le point où la symédiane issue de A du triangle ABC coupe le cercle circonscrit à ce triangle, $F\beta$ et $F\gamma$ les perpendiculaires abaissées de ce point sur AB et sur AC. Si par les sommets B et C on mène deux antiparallèles quelconques BB′ et CC′ relativement à l'angle BAC et que ces droites coupent respectivement $F\beta$ et $F\gamma$ en B_1 et en C_1, la parallèle à AB menée par B_1 et la parallèle à AC menée par C_1 se coupent sur la tangente en A du cercle ABC. *(d'Ocagne.)*

323. — On projette un triangle ABC sur tous les plans qui ont même trace sur le plan ABC. Si, sur une base fixe A′B′, on construit un triangle A′B′C′ semblable à l'une quelconque des projections de ABC, le sommet C′ décrit une circonférence.

(J. Neuberg.)

324. — Des sommets A,B,C d'un triangle ABC, avec les côtés opposés aux milieux des côtés avec les médianes correspondantes, pour rayon, on décrit respectivement les cercles S_a, S_b, S_c; M_a, M_b, M_c.

Soient A et A′ les intersections de M_a, avec le cercle circonscrit ξ ; A′ et A_1 les intersections de S_b et S_c ; A″ et A_2 les intersections de S_a et M_a et B′, C′ ; B_1, C_1 ; B″, C″ ; B_2, C_2 les points analogues aux précédents :

1° Les cercles S_a, S_b, S_c, M_a, M_b, M_c ont pour centre radical commun le point H_1, symétrique de l'orthocentre H, par rapport au cercle circonscrit;

2° A′B′C′ est le triangle orthocentrique de $A_1B_1C_1$ qui est lui-même le triangle anticomplémentaire de ABC ;

3° Les droites B′C′, C′A′, A′B′, sont les axes radicaux du cercle circonscrit et des cercles S_a, S_b, S_c ; elles coupent respectivement B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 en trois points α,β,γ situés sur la droite δ de Longchamps.

4° Les points α, β, γ sont, respectivement, les centrse radicaux des groupes de circonférences;

$$\xi,\ \Delta,\ S_a,\ M_a\ ;\qquad \xi,\ \Delta,\ S_b,\ M_b\ ;\qquad \xi,\ \Delta,\ S_c,\ M_c$$

Δ désignant le cercle de Longchamps.

5° Les six points A'', A_2, B'', B_2, C'', C_2 sont situés sur un même cercle Σ ayant, pour centre, le centre de gravité G du triangle, et dont le rayon ρ est donné par la formule

$$\rho_2 = \frac{2}{9}(a_2 + b_2 + c_2).$$

6° Le cercle Σ passe par l'intersection du cercle de Longchamps et du cercle anticomplémentaire du cercle circonscrit ;

7° Le cercle Σ est le cercle directeur de l'ellipse de Steiner.

(E. Vigarié.)

325. — Soit μ la droite harmoniquement associée au point M, par rapport au triangle ABC. Les droites joignant un point quelconque de μ à A, à B et à C coupent les pédales correspondantes du point M en α, β et γ. Démontrer que les côtés du triangle $\alpha\beta\gamma$ passent par les sommets du triangle ABC.

(M. d'Ocagne.)

(Nous rappelons que la droite harmoniquement associée au point M par rapport au triangle ABC est celle qui joint les conjugués harmoniques, par rapport aux extrémités des côtés de ce triangle, des points A_1, B_1, C_1 où ces côtés sont respectivement coupés par AM, BM, CM. Les pédales du point M sont les droites A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1.)

ERRATA

A la question 319, page 96, *lisez :*

4° $$\sin\frac{A+B}{2}\left[\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2}\cos\frac{D}{2}\right] =$$

5° $$2\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{C+D}{2} =$$

(Communiqués par MM. Vazou et A. Lavieuville.)

Le Directeur Gérant,

G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 9580-5-9.

CARACTÈRES DE DIVISIBILITÉ
D'UN NOMBRE PAR UN NOMBRE PREMIER

Par M. **Loir.**

Soit le nombre proposé $N = \ldots dd'd''cc'c''bb'b''aa'a''$, et soit p le nombre premier considéré. Il sera toujours facile de composer avec p, au moyen d'autres nombres premiers, un produit terminé par 001 ; soit $x001$, ce produit.

Divisons N par $x001$, en employant la méthode que nous avons exposée dans ce journal. Nous aurons :

Pour le premier reste,... $dd'd''cc'c''bb'b'' - x.aa'a''$.

Pour le deuxième reste,... $dd'd''cc'c'' - x(bb'b'' - x.aa'a'')$.

Pour le troisième reste,... $dd'd'' - x[cc'c'' - x(bb'b'' - x.aa'a'')]$, et ainsi de suite.

Le dernier reste donne :

$$..dd'd'' - x.cc'c'' + x^2.bb'b'' - x^3.aa'a''.$$

Nous pouvons donc énoncer la règle suivante :

Règle. — *On partage le nombre en tranches de trois chiffres, à partir de la droite, et l'on fait la somme des tranches de rang impair, après avoir multiplié la première par* x^3, *la troisième par* x, *puis, de cette somme, on retranche celle des tranches de rang pair, après avoir multiplié la deuxième par* x^2.

Si la différence est divisible par p, *ou par l'un des facteurs de* x001, *le nombre est divisible par* p *ou par ce facteur, et réciproquement. Enfin, si le dernier reste était nul, ou s'il était égal à un multiple du groupe employé, le nombre serait divisible par tous les facteurs du groupe* x001.

Si le dividende comprenait un plus grand nombre de tranches, n par exemple, on multiplierait successivement les tranches, à partir de la droite, par $x^{n-1}, x^{n-2}, x^{n-3}\ldots$ et l'on opérerait comme il est indiqué ci-dessus. Dans la pratique, pour éviter les multiplications des tranches par des puissances trop élevées de x, je préfère ne pas aller au delà de la troisième

puissance; alors j'emploie le reste auquel je suis arrivé, comme nouveau dividende, sur lequel j'opère de la même manière.

Pour $x = 1$, dans le cas de $7.11.13 = 1001$, on obtiendrait la règle déja donnée : *Retrancher la somme des tranches de rang impair de la somme des tranches de rang pair*, etc.

On trouverait une règle tout à fait analogue si le groupe de nombres premiers était terminé par 01 ; c'est-à-dire s'il était de la forme $y01$. Le dividende serait alors partagé en tranches de deux chiffres, à partir de la droite.

Si le nombre premier faisait partie d'un des groupes suivants terminés par 0001,

$$73.137 = 10001,$$
$$3.59.113 = 20001,$$
$$13.17.181 = 40001 ;$$

on opérerait de même sur le nombre partagé en tranches de quatre chiffres, à partir de la droite.

APPLICATIONS

1° *Le nombre* 5 404 246 106 *est-il divisible par* 23?

On a $3.23.29 = 2001$.

En appliquant la règle donnée, on aura :

$$5 - 2.404 + 2^2.246 - 2^3.106.$$

$$\begin{array}{rr} 8.106 = & 848 \\ 2.404 = & 808 \\ \hline & 1656 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} 4.246 = & 984 \\ 5 = & 5 \\ \hline & 989 \end{array}$$

$$1656 - 984 = 667 = 23.29.$$

Le nombre donné est divisible par 23 et par 29.

2° *Le nombre* 8 102 318 *est-il divisible par* 43?

On a $43 \times 7 = 301$.

En appliquant la règle, on a :

$$8 - 3.10 + 3^2.23 - 3^3.18.$$

$$\begin{array}{rr} 27.18 = & 486 \\ 3.10 = & 30 \\ \hline & 516 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} 9.23 = & 207 \\ 8 = & 8 \\ \hline & 215 \end{array}$$

$$516 - 215 = 301.$$

Le nombre donné est divisible par 43 et par 7.

3° *Le nombre* 44 534 228 337 079 949 655 *est-il divisible par* 59?

On a $$59.3.113 = 20001.$$

En appliquant la règle, on trouve :

$$-4453 + 2.4228 - 2^2.3370 + 2^3.7994 - 2^4.9655.$$

$$\begin{array}{rrrr} 16.9655 = & 154480 & & \\ 4.3370 = & 13480 & 8.7994 = & 63952 \\ 4453 = & 4453 & 2.4228 = & 8456 \\ \hline & 172413 & & 72408 \end{array}$$

$$172413 - 72408 = 100005 = 5.20001.$$

Le nombre est divisible par 59, 3 et 113.

4° *Le nombre* 2 226 600 086 849 655 *est-il divisible par* 73?

On a $$73.137 = 10001.$$

En appliquant la règle il vient :

$$2226 - 6000 + 8684 - 9655.$$

$$\begin{array}{rr} 9655 & 8684 \\ 6000 & 2226 \\ \hline 15655 & 10910 \end{array}$$

$$15655 - 10910 = 4745 = 73.65.$$

Le nombre est divisible par 73.

SUR LES CENTRES ISODYNAMIQUES
ET SUR LES CENTRES ISOGONES

Par M. **A. Boutin**, professeur au Collège de Courdemanche.

(*Suite*, voir p. 99.)

II. — *Les centres isodynamiques sont situés sur le diamètre de Brocard.*

En effet ces points sont des centres de cercles de Schoute.

III. — *Les distances des centres isodynamiques, aux sommets de* ABC, *sont inversement proportionnelles aux côtés opposés.*

Soient C_1, C_2, les côtés des triangles podaires équilatéraux.

On a

$$VA = \frac{C_1}{\sin A} \qquad VB = \frac{C_1}{\sin B} \qquad VC = \frac{C_1}{\sin C}$$

$$WA = \frac{C_2}{\sin A} \qquad WB = \frac{C_2}{\sin B} \qquad WC = \frac{C_2}{\sin C}$$

d'où

$$\frac{VA}{WA} = \frac{VB}{WB} = \frac{VC}{WC} = \frac{C_1}{C_2}$$

ce qui montre que ces points sont tripolairement associés, (résultat connu).

IV. — *Calculer le côté des triangles équilatéraux podaires.*

Soient C_1, C_2 ces côtés. On a :

$$C_1^2 = x^2 + y^2 + 2xy \cos C,$$

$$3C_1^2 = 2\Sigma x^2 + 2\Sigma xy \cos C,$$

$$x = \frac{h \sin A \cos (A - 30^\circ)}{\Sigma \sin A \cos (A - 30^\circ)} = \frac{S}{R} \cdot \frac{\cos (A - 30^\circ)}{\Sigma \sin A \cos (A - 30^\circ)}.$$

On trouve des formules analogues pour y *et* z et l'on a

$$3C_1^2 = \frac{2S^2}{R^2} \cdot \frac{\Sigma \cos^2 (A - 30^\circ) + \Sigma \cos A \cos (B - 30^\circ) \cos (C - 30^\circ)}{[\Sigma \sin A \cos (A - 30^\circ)]^2}.$$

Si l'on développe les deux termes et si l'on remplace dans les développements les expressions symétriques en fonctions de $\operatorname{tg} \varphi$ et $\operatorname{cotg} \theta$, θ étant l'angle de Brocard et φ l'angle donné par la relation

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C,$$

on a

$$C_1^2 = \frac{S^2}{R^2} \cdot \frac{\operatorname{tg} \varphi \operatorname{cotg} \theta - 1}{\operatorname{tg} \varphi (\operatorname{cotg} \theta + \sqrt{3})}.$$

Comme

$$S = \frac{2R^2 \operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \varphi \operatorname{cotg} \theta - 1},$$

$$C_1^2 = \frac{S \sin \theta}{\sin (30^\circ + \theta)}.$$

On a, de même :

$$C_2^2 = \frac{S \sin \theta}{\sin (30^\circ - \theta)}.$$

On peut remarquer les relations :

$$\frac{1}{C_1^2} - \frac{1}{C_2^2} = \frac{\sqrt{3}}{S}$$

$$\frac{1}{C_1^2} + \frac{1}{C_2^2} = \frac{1}{S \operatorname{tg} \theta}.$$

V. — *Les perpendiculaires abaissées, des sommets de* ABC, *sur les côtés du premier ou du second triangle podaire équilatéral se coupent en un même point, lequel est le premier ou le second centre isogone.*

Cela résulte de ce que les centres isogones sont les inverses des centres isodynamiques, par application d'un théorème général. (Voyez *J. M. E.* année 1888, *Exercices divers.*)

VI. — *Si* A_1, B_1, C_1; A_2, B_2, C_2 *sont les sommets des triangles équilatéraux construits extérieurement et intérieurement sur les côtés de* ABC, *on sait que*

$$AA_1 = BB_1 = CC_1 = \Delta_1$$
$$AA_2 = BB_2 = CC_2 = \Delta_2$$

On a

$$C_1\Delta_1 = C_2\Delta_2 = 2S.$$

En effet,

$$\Delta_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(60^\circ + C) = 2S(\operatorname{cotg}\theta + \sqrt{3}),$$
$$\Delta_2^2 = 2S(\sqrt{3} - \operatorname{cotg}\theta).$$

Ces égalités, combinées avec les valeurs trouvées plus haut pour C_1, C_2, donnent les relations indiquées.

VII. — *La droite qui joint les centres* P_1, P_2, *des triangles podaires équilatéraux passe par le centre de gravité* G *et le point de Lemoine* K *de* ABC.

Soient $a_1b_1c_1$ le premier triangle podaire équilatéral (x_1, y_1, z_1), (x, y, z), les coordonnées normales de son centre et de V; x_1 s'obtiendra en prenant les moments par rapport à BC de masses égales à l'unité placées en a_1, b_1, c_1.

On a :

$$Bc_1 \sin B = x + z\cos B.$$
$$Cb_1 \sin C = x + y\cos C,$$
$$x_1 = Bc_1 \sin B + Cb_1 \sin C,$$
$$x_1 = 2x + z\cos B + y\cos C;$$
$$x_1 = 2\cos(A - 30^\circ) + \cos B\cos(C - 30^\circ)$$
$$+ \cos C\cos(C - 30^\circ).$$

Après simplifications, on a, finalement :

$$\frac{x_1}{\sqrt{3}\sin A + 2\sin B\sin C} = \frac{y_1}{\sqrt{3}\sin B + 2\sin A\sin C}$$
$$= \frac{z_1}{\sqrt{3}\sin A + 2\sin A\sin B},$$

ce qui montre que le centre P_1, de $a_1b_1c_1$, est sur la droite GK.

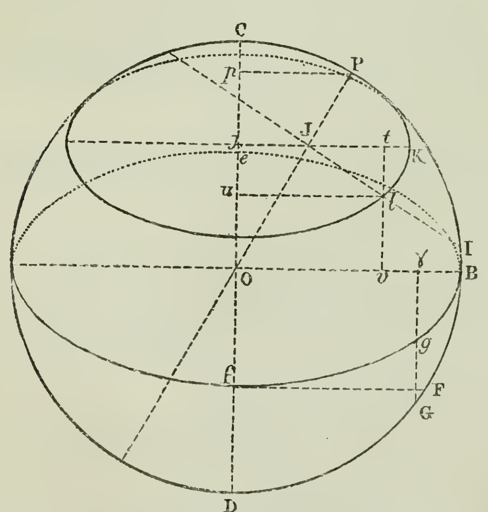
Un calcul analogue montrerait qu'il en est de même du centre du second triangle équilatéral podaire.

(A suivre.)

LES PROJECTIONS POLYÉDRIQUES

(Suite et fin.)

Formules pour les projections polyédriques. — Pour obtenir les formules dont on se sert pour la construction des cartes, en projection polyédrique, reprenons l'épure de la projection orthographique horizontale, que nous reproduisons en nous servant des mêmes lettres et en supprimant seulemen quelques lignes de construction.



Nous nous proposons de calculer les distances $lu = x$, $lv = y$ d'un point quelconque l, aux droites OC et OB, connaissant sa longitude L et sa latitude λ : ces distances se nomment les coordonnées rectilignes du point l, par rapport aux axes OC et OB.

Commencons par calculer $O\gamma$ et $g\gamma$, g étant pris sur l'équateur, à la même longitude que l. D'abord $O\gamma$ n'est autre chose que le sinus de DG ou de la longitude L. Quant à $g\gamma$, c'est la projection, sur le plan de la figure, de $G\gamma$ ou de cos L. Or, l'angle de projection est celui de l'équateur avec l'horizon, soit $90^\circ - \varphi$, φ étant la latitude du point central de la carte. Ainsi :

$$O\gamma = \sin L,$$
$$g\gamma = \cos L \sin \varphi.$$

Comme le parallèle du point l a une projection homothétique à celle de l'équateur, lu et lt sont les produits de $O\gamma$ et de $g\gamma$ par le rapport d'homothétie $\frac{jk}{OB}$, ou $\frac{JI}{OB} = \sin IP = \cos \gamma$. Donc :

$$lu = \sin L \cos \lambda,$$
$$lt = \cos L \sin \varphi \cos \lambda.$$

Il reste à évaluer $lv = tv - lt$. Or, tv ou jo est égal à OJ cos φ, ou à $\sin \lambda \cos \varphi$. De sorte que

(1) $x = \cos \lambda \sin L$,

(2) $y = \sin \lambda \cos \varphi - \cos \lambda \sin \varphi \cos L$.

Telles sont les formules des coordonnées, le rayon terrestre étant pris pour unité.

Mais ces formules se simplifient si l'on considère que, dans les cartes du Ministère de l'intérieur, L ne dépasse pas 15′. On peut en effet, sans erreur appréciable, remplacer sin L par L et cos L par $1 - \frac{L^2}{2}$, l'arc L étant alors mesuré par son rapport au rayon. Car, en mettant L, au lieu de sin L, on fait sur ce facteur une erreur inférieure à $\frac{L^3}{6}$, ou, comme la plus grande valeur de L est $\frac{1}{4}$ arc $1^\circ = \frac{\pi}{4 \times 180} < \frac{1}{180}$, une erreur inférieure à $\frac{1}{30\,000\,000}$.

Ainsi l'erreur faite sur x est inférieure à $\frac{R \cos \lambda}{30\,000\,000}$, R désignant le rayon terrestre, soit 6 366 000 mètres. Elle n'atteint donc pas, à plus forte raison, $\frac{6\,366\,000}{30\,000\,000}$, ou envi-

ron 2 décimètres; et, dans la carte au 100000e, cette erreur se divise par 100 000. L'erreur faite par la substitution de $1 - \frac{L^2}{2}$ à cos L est bien plus petite encore. Les formules (1) et (2) deviennent ainsi :

$$x = L \cos \lambda.$$

$$y = \sin(\lambda - \varphi) + \frac{1}{2} L^2 \cos \lambda \sin \varphi.$$

L'arc $\lambda - \varphi$ est l'excès, positif ou négatif, de la latitude du point variable de la carte sur celle du point central : désignons-le par ε. Il ne dépasse pas la moitié de 15′, et l'on peut encore substituer cet arc à son sinus. Dans le terme très petit $\frac{1}{2} L^2 \cos \lambda \cos \varphi$, on peut remplacer $\cos \lambda$ par $\cos \varphi$ puisque λ diffère très peu de φ. Enfin, dans la valeur de x, écrivons à la place de $\cos \gamma$, $\cos(\varphi + \varepsilon)$, ou $\cos \varphi \cos \varepsilon - \sin \varphi \sin \varepsilon$. Ici l'on peut remplacer $\cos \varepsilon$ par 1, et $\sin \varepsilon$ par ε ; car, en tenant compte du facteur L, qui est petit, on reconnaîtra encore, par un calcul numérique, que l'erreur ainsi commise est inappréciable. En mettant, dans la valeur de x, $L \cos \varphi$ en facteur, on obtient définitivement

$$(3) \qquad x = L \cos \varphi (1 - \varepsilon \operatorname{tg} \varphi),$$

$$(4) \qquad y = \varepsilon + \frac{1}{4} L^2 \sin 2\varphi,$$

ε désignant l'excès de la latitude d'un point variable de la carte sur celle du point central, et L la longitude du point central : cette latitude et cette longitude sont exprimées en parties du rayon.

D'après la formule (4), si l'on donne à ε une valeur constante, on voit que chaque parallèle est une courbe très voisine d'une parallèle à l'axe des x, et dont la flèche est représentée par la valeur que prend le terme $\frac{1}{4} L^2 \sin 2\varphi$, quand on fait R égal à 15′ (exprimées en parties du rayon). On reconnaît facilement qu'à l'éche du $\frac{1}{100\,000}$, cette flèche se monte à $\frac{3}{10}$ de millimètre.

Si, au contraire, on donne à L une valeur constante, le lieu représenté par les équations (3) et (4) est une droite, puisque ε entre au premier degré dans ces deux équations.

Il faut se souvenir, pour employer ces formules, que si un arc α est exprimé en degrés, son expression en parties du rayon est $\frac{\pi\alpha}{180}$.

ESSAI
SUR LA
GÉOMÉTRIE DE LA RÈGLE ET DE L'ÉQUERRE
(SECONDE PARTIE)

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite*, voir p. 110.)

---

122. Le rayon de la tour. (Première solution générale). Nous exposerons maintenant deux constructions assurément plus compliquées, mais qu'on utiliserait dans certains cas, si, pour diverses raisons, celles que nous venons d'indiquer étaient jugées impraticables; par exemple, si la vue, gênée par des obstacles, ne permettait de viser qu'une partie de la tour.

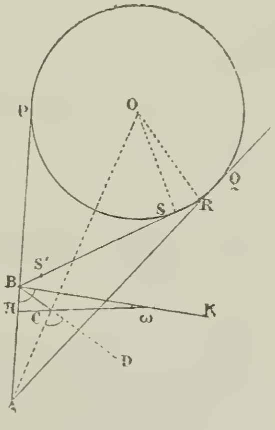


Fig. 311.

D'un point A, pris dans la région d'où l'on aperçoit la base de l'édifice, on trace deux lignes de visée AP, AQ; et, par un point B, pris sur AP, on trace une ligne BR tangente à la base de la tour. Soit C le centre du cercle inscrit à ABR; abaissons CH perpendiculaire sur AP et, avec la fausse équerre, menons par B, une droite BK telle que $KBA = \pi - BCA = ACD$; BK rencontre CH en ω; ωH est le rayon cherché.

Pour le démontrer, observons que le cercle inscrit à RBA touche BR en un point S′, isotomique de S sur BR. De plus BH = BS′; par suite, BH = RS.

D'autre part

$$SRO = \frac{1}{2}SRQ = \frac{1}{2}ABR + \frac{1}{2} = BAR = ABC + BAC = ACD = HB\omega.$$

Les triangles rectangles OAS, ωBH sont donc égaux; ainsi ωH = OS.

Remarque. — La méthode précédente s'appliquerait encore dans le cas où la base de la tour serait complètement invisible; soit que des obstacles placés entre celle-ci et l'observateur la cachent complètement à ses yeux, soit que des bâtiments enveloppant cette base de tous côtés, ne permettent de voir que la partie supérieure de l'édifice.

Dans ce cas, on fait usage de piquets suffisamment élevés pour établir une ligne de visée tangente à la tour; la projection de cette ligne sur le plan horizontal, projection obtenue en jalonnant la ligne qui va de l'œil de l'observateur au piquet considéré, est tangente à la base invisible de la tour. On est ainsi ramené au cas précédemment traité et nous pouvons, pour ces raisons, considérer comme résolu le problème qui se propose la détermination du rayon d'une tour dont la base est, tout à la fois, inaccessible et invisible; la partie supérieure étant seule visible, et, même, par un côté seulement.

Nous ferons encore observer que les constructions indiquées au paragraphe précédent peuvent toujours être effectuées, en restant aussi éloigné de l'édifice que l'on voudra; il suffit de prendre B suffisamment voisin de A pour que les tracés nécessaires puissent être exécutés dans la partie du terrain accessible à l'observateur. Cette remarque s'applique aux constructions que nous indiquons dans le paragraphe suivant.

123. Le rayon de la tour (Deuxième et troisième solutions générales). — Présentons enfin, avant de quitter ce sujet, deux autres solutions assez simples, surtout si l'on dispose d'une table des inverses.

1° Considérons, comme tout à l'heure, les deux tangentes AP, AR, issues de A, et la tangente BR partant d'un point B

pris sur AP. On peut considérer la circonférence de base de la tour comme étant un cercle exinscrit au triangle RAB. Soient

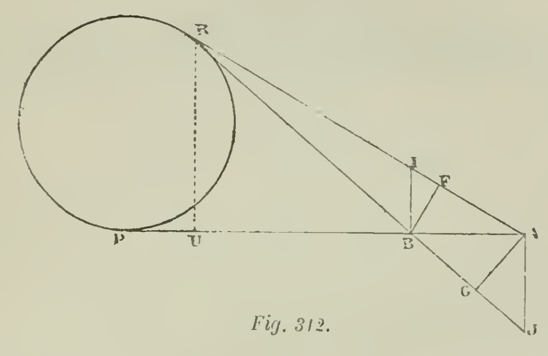


Fig. 312.

AG, BF, RU les trois hauteurs de ABR; en désignant par r le rayon de base de la tour, on a

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{RU} + \frac{1}{AG} - \frac{1}{BF}.$$

Dans cette formule RU est une quantité inconnue ; mais en traçant BI, AJ perpendiculairement à AB, on a (*Première partie* § 14)

$$\frac{1}{BI} = \frac{1}{RU} + \frac{1}{AJ}.$$

Finalement, nous pouvons écrire

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{BI} + \frac{1}{AG} - \frac{1}{AJ} - \frac{1}{BF}.$$

2° Prenons sur la capitale de la tour, c'est-à-dire sur la

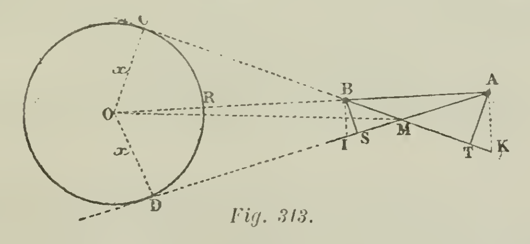


Fig. 313.

droite qui va de l'œil de l'observateur au centre de celle-ci, deux positions A, B; soit AD l'une des tangentes, issue de A; BC, l'une de celles qui partent de B. Si l'on abaisse AT, BS

perpendiculaires sur BC, AD, on a

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{BS} - \frac{1}{AT}.$$

En effet, soient BI, AK perpendiculaires à AB. Les triangles semblables : OCB, ABK, d'une part; AOD, ABI, d'autre part; donnent

$$\frac{x}{AK} = \frac{OB}{BK}, \frac{BI}{x} = \frac{OB + BA}{AI};$$

d'où

(1) $$x\left(\frac{AI}{BI} - \frac{BK}{AK}\right) = AB.$$

Mais on a

$$BI.BA = AI.BS, \quad BK.AT = AB.AK.$$

D'après cela, l'égalité (1) devient

$$x\left(\frac{BA}{BS} - \frac{AB}{AT}\right) = AB,$$

d'où $$\frac{1}{x} = \frac{1}{BS} - \frac{1}{AT}.$$

124. — Remarque. — Si l'on voulait calculer la distance à laquelle on se trouve de la tour, on pourrait observer que MO est la bissectrice de l'angle CMD. On a donc

$$\frac{OB}{OA} = \frac{MB}{MA};$$

et comme $$OA - OB = AB,$$

on peut calculer OA, ou OB, comme on voudra. En retranchant, de la longueur trouvée pour OA, le rayon de la tour, on obtiendra la distance inconnue AR. *(A suivre.)*

EXERCICES DIVERS

Par M. **Boutin**, professeur au Collège de Courdemanche.

(*Suite*, voir p. 82.)

---

116. — Les distances du point de Lemoine d'un triangle aux sommets de ce triangle sont respectivement proportionnelles à

$$\frac{m}{\sin A}, \quad \frac{m'}{\sin B}, \quad \frac{m''}{\sin C}$$

m, m', m'' désignant les médianes du triangle ABC.

117. — Résoudre l'équation :

$$\operatorname{tg}(x-b)+\alpha\operatorname{tg}(x-a)+\beta\operatorname{tg}x+\alpha\operatorname{tg}(x+a)+\operatorname{tg}(x+b)=0.$$

En groupant les termes équidistants des extrêmes, on a

$$\frac{\sin 2x}{\cos(x-b)\cos(x+b)}+\frac{\alpha\sin 2x}{\cos(x+a)\cos(x-a)}+\frac{\beta\sin x}{\cos x}=0.$$

Cette équation se décompose. On a d'abord

$$\sin x = 0,$$

d'où

$$x = K\pi;$$

puis

$$\frac{2\cos\alpha}{\cos(x-b)\cos(x+b)}+\frac{2\alpha\cos\alpha}{\cos(x+a)\cos(x+a)}+\frac{\beta}{\cos x}=0.$$

On tire, de celle-ci,

$$\beta\sin^2 a\sin^2 b\operatorname{tg}^4 x-\operatorname{tg}^2 x(\beta\sin^2 a\cos^2 b+\beta\sin^2 b\cos^2 a+2\sin^2 a+2\alpha\sin^2 b)$$
$$+2\cos^2 a+2\alpha\cos^2 b+\beta\cos^2 a\cos^2 b=0.$$

Cette équation bicarrée en introduisant $\cos 2x$, $\cos 2a$, $\cos 2b$ devient

$$\cos^2 2x(2+2\alpha+\beta)+\cos 2x(2+2\alpha+2\cos 2a+2\alpha\cos 2b+\beta\cos 2a+\beta\cos 2b)$$
$$+2\cos 2a+2\alpha\cos 2b+\beta\cos 2a\cos 2b=0.$$

Equation du second degré en *cos* 2x.

118. — Trouver, dans le plan d'un triangle, un point O tel qu'en le projetant sur les trois côtés de ce triangle, en A'.B',C', la somme des carrés des trois côtés du triangle A'B'C' soit minimum.

On trouve que le point cherché est le point de Lemoine du triangle ABC. La valeur du minimum est : $3S\operatorname{tg}\theta$: S désignant l'aire et θ étant l'angle de Brocard du triangle ABC.

Remarque. — Le lieu des points O, tels que :

$$A'B'^2 + A'C'^2 + B'C'^2 = m^2,$$

m^2 désignant une constante donnée, est une conique dont le centre coïncide avec le point de Lemoine de ABC.

119. — On projette le centre de gravité G d'un triangle ABC, en A', B', C' sur ses trois côtés. Chacune des projetantes partage l'angle correspondant du triangle A'B'C' en deux autres. Soient $\alpha,\alpha',\beta,\beta',\gamma,\gamma'$, ces six angles. Soient, en outre, a', b', c' les côtés du triangle A'B'C', θ' son angle de Brocard, S' son aire. Enfin S, R, θ, désignant l'aire, le rayon du cercle circonscrit, l'angle de Brocard de ABC ; démontrer les relations :

1° $\operatorname{cotg}\alpha+\alpha'=\operatorname{cotg}\beta+\operatorname{cotg}\beta'=\operatorname{cotg}\gamma+\operatorname{cotg}\gamma'=2\operatorname{cotg}\theta,$

2° $\operatorname{cotg}\alpha+\operatorname{cotg}\beta+\operatorname{cotg}\gamma=\operatorname{cotg}\alpha'+\operatorname{cotg}\beta'+\operatorname{cotg}\gamma'=3\operatorname{cotg}\theta,$

3° $$\operatorname{cotg}\theta'=\frac{\operatorname{cotg}^2\theta+3}{2\operatorname{cotg}\theta},$$

4° $$a'^2 + b'^2 + c'^2 = \frac{2S^2}{9R^2}(\cot^2\theta + 3),$$

5° $$9\,S' = \frac{S^2}{R^2}\cot\theta\,.$$

120. — Si l'on projette le point de Lemoine, d'un triangle ABC, en A', B', C' sur les trois côtés de ce triangle ; l'angle de Brocard, du triangle A'B'C', est le même que celui du triangle ABC.

121. — On projette un point O sur les trois côtés d'un triangle ABC en A', B', C'. Déterminer le lieu de O de manière que les triangles ABC, A'B'C' aient même angle de Brocard.

Ce lieu est la circonférence de Brocard.

Soient x, y, z, les distances de O aux trois côtés de ABC. α, α' les angles B'A'O, C'A'O.

Le triangle OA'B' donne

$$\frac{\sin\alpha}{y} = \frac{\sin(C-\alpha)}{x}.$$

d'où
$$\cot\alpha = \frac{x + y\cos C}{y\sin C}$$

De même,
$$\cot\alpha' = \frac{x + z\cos B}{z\sin B}.$$

On a donc

$$\cot A' = \frac{\cot\alpha\cot\alpha' - 1}{\cot\alpha + \cot\alpha'} = \frac{x^2 + xy\cos C + xz\cos B - yz\cos A}{xy\sin C + xz\sin B + yz\sin A}.$$

On trouve, de même, cotg B', cotg C', et l'on a

$$\cot\theta = \frac{x^2 + y^2 + z^2 + xy\cos C + xz\cos B + yz\cos A}{xy\sin C + xz\sin B + yz\sin A},$$

ou

$$(x^2 + y^2 + z^2)\sin\theta = xy\sin(C-\theta) + xz\sin(B-\theta) + yz\sin(A-\theta);$$

équation du cercle de Brocard. *(A suivre.)*

CORRESPONDANCE

Extrait d'une lettre de M. TARRY.

... Par des considération de Géométrie pure je suis arrivé exactement à la construction que vous avez indiquée (*) pour obtenir le point de Steiner. Malheureusement, la méthode à

(*) Voyez *Journal* 1886; p. 271.

laquelle je fais allusion est assez longue. Elle offre, en somme, peu d'intérêt et je n'ai pas atteint le but que je poursuivais : *trouver une construction simple du point de Tarry* (**).

Pourtant je n'ai pas complètement perdu mon temps, puisque j'ai rencontré. incidemment, ce théorème, qui est peut-être nouveau :

Le point réciproque du point de Steiner est le centre d'homologie du triangle de référence et de son triangle polaire, relatif à l'hyperbole de Kiepert.

QUESTIONS D'EXAMEN

24. — Si l'on pose

$$(A)\quad \cos\alpha = \frac{a}{b+c},\quad \cos\beta = \frac{b}{c+a},\quad \cos\gamma = \frac{c}{a+b};$$

on a,

$$(B)\qquad \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2} + \mathrm{tg}^2\frac{\beta}{2} + \mathrm{tg}^2\frac{\gamma}{2} = 1.$$

(*Saint-Cyr*, p. 41.)

La première des égalités proposées donne

$$1 - \cos\alpha = \frac{b+c-a}{b+c},\qquad 1+\cos\alpha = \frac{a+b+c}{b+c},$$

et, par conséquent,

$$\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{b+c-a}{a+b+c},$$

on trouve, de même,

$$\mathrm{tg}^2\frac{\beta}{2} = \frac{c+a-b}{a+b+c},\qquad \mathrm{tg}^2\frac{\gamma}{2} = \frac{a+b-c}{a+b+c},\ \text{etc.}$$

Remarque. — On devait prévoir, *a priori*, qu'il existait une relation entre α, β, γ, les formules (A) étant linéaires et homogènes par rapport aux lettres a, b, c. En effectuant cette élimination, ce qui constitue d'ailleurs la marche naturelle, on trouve

$$\begin{vmatrix} -1 & \cos\alpha & \cos\alpha \\ \cos\beta & -1 & \cos\beta \\ \cos\gamma & \cos\gamma & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$(C)\quad 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta + \cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha\cos\gamma - 1 = 0.$$

(**) Le point de Tarry étant, sur le cercle circonscrit au triangle de référence, diamétralement opposé au point de Steiner, la connaissance de l'un de ces points entraîne, naturellement, celle du second.

Il est facile de vérifier que la relation (B), mise sous la forme

$$\sum \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = 1,$$

et l'égalité (C), sont identiques.

25. — Si l'on a

$$\operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{b}{a + c},$$

le triangle correspondant est rectangle. (*Saint-Cyr*, p. 42.)

Lorsqu'on suppose, pour généraliser la question posée, que, entre les éléments d'un triangle, il existe une relation

(1) $$f(a, b, c, A, B, C) = 0,$$

pour trouver la singularité correspondante, pour le triangle considéré, on peut suivre deux voies, l'une et l'autre très générales.

1° On peut observer que (1) est une relation homogène en a, b, c et, par suite, on a

$$f(\sin A, \sin B, \sin C, A, B, C) = 0.$$

De cette égalité, on pourra déduire la propriété que l'on propose d'établir.

2° On peut aussi remplacer les angles en fonction des côtés, par les formules connues. On obtient alors une relation entre les côtés mêmes du triangle. Cette égalité constitue la propriété cherchée.

En appliquant ces deux méthodes à la question proposée, on a d'abord

$$\frac{\sin \frac{B}{2}}{\cos \frac{B}{2}} = \frac{\sin B}{\sin A + \sin C} = \frac{\sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}}{\sin \frac{A + C}{2} \cos \frac{A - C}{2}},$$

ou

$$\cos \frac{A - C}{2} = \cos \frac{B}{2}, \text{ etc...}$$

Et, par la seconde voie,

$$\frac{(p - a)(p - c)}{p(p - b)} = \frac{b^2}{(a + c)^2},$$

ou $$(b + c - a)(a + b - c)(a + c)^2 = b^2(a + b + c)(a + c - b),$$

ou, enfin, $$b^4 = (a^2 - c^2)^2.$$

En supposant $a > c$, on a

$$b^2 = a^2 - c^2, \quad \text{etc.}$$

26. — Démontrer que si l'on suppose

(1) $$\operatorname{tg}^2 \alpha = q + 2 \operatorname{tg}^2 \beta,$$

on a

(2) $$\cos 2\beta = 1 + \cos 2\alpha.$$

(*Saint-Cyr*, p. 44.)

D'une façon générale, toute fonction rationnelle de $\mathrm{tg}^2\,\alpha$, $\mathrm{tg}^2\,\beta$, $\mathrm{tg}^2\,\gamma$,... se transforme en une fonction rationnelle de $\cos 2\alpha$, $\cos 2\beta$, $\cos 2\gamma$,... au moyen de la formule

$$\mathrm{tg}^2\,\varphi = \frac{1 - \cos 2\varphi}{1 - \cos 2\varphi}.$$

Si l'on prend la relation

$$p\,\mathrm{tg}^2\,\alpha + q\,\mathrm{tg}^2\,\beta = 1,$$

on trouve

$$(p+q+1)\cos 2\alpha \cos 2\beta + (p+1-q)\cos 2\alpha + (q-1+p)\cos 2\beta = p+q-1.$$

Dans le cas particulier proposé, $p = 1$, $q = -2$, on a

$$\cos 2\beta - \cos 2\alpha = 1.$$

27. — Démontrer que

$$\frac{abcde - ab}{99900} = \frac{abcdec - abc}{999000}.$$

(*École Navale*, p. 49.)

On sait comment cette question se présente dans la théorie des fractions périodiques. Pour vérifier l'égalité proposée on observe que

$$\frac{abcdec - abc}{999000} = \frac{abcde0 + c - ab0 - c}{999000} = \frac{(abcde - ab)\,10}{999000}$$
$$= \frac{abcde - ab}{99900}.$$

28. — Trouver la relation (*), qui doit exister entre a, b, c ; a', b', c', pour que l'équation

$$ax^2 + bx + c + \lambda(a'x^2 + b'x + c') = 0,$$

ait ses racines rationnelles, quel que soit λ. (*Id.*)

Il suffit que la quantité

$$\mathrm{U} = (b + \lambda b')^2 - 4(a + \lambda a')(c + \lambda c'),$$

soit, pour toute valeur de λ, un carré parfait.

Or on a

$$\mathrm{U} = \lambda^2(b'^2 - 4a'c') + 2\lambda(bb' - 2ca' - 2ac') + b^2 - 4ac.$$

Il suffit donc que l'on ait

$$(bb' - 2ac' - 2ac')^2 - (b^2 - 4ac)(b'^2 - 4a'c') = 0.$$

Cette relation, développée et simplifiée, devient

$$(ac' - ca')^2 = (ab' - ba')(bc' - cb').$$

Comme on le voit, cette égalité exprime que les équations

(1) $$ax^2 + bx + c = 0, \qquad a'x^2 + b'x + c' = 0,$$

ont une racine commune.

On pouvait *a priori* prévoir ce résultat en observant que si les deux équations (1) ont une racine commune, cette racine est nécessairement commensurable. En effet, dans ce cas, elle est donnée par une équation du premier degré.

(*) L'énoncé porte, par erreur, croyons-nous, *les relations*.

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES COMPLET

SESSION D'OCTOBRE 1888 (*).

PARIS

1re Série. *Mathématiques.* — 1° Étant données deux droites AB et AC et un cercle O tangent en B et en C aux deux droites, on mène un s cond cercle tangent au premier et aux deux droites, ayant son centre O′ entre O et A. On donne le rayon R du cercle O et la distance $OA = D$: calculer le rayon R_1 du second cercle et la distance $O'A = D_1$. On mène ensuite un troisième cercle O″ tangent au second et aux deux droites; puis un quatrième, tangent au troisième et aux deux droites; et ainsi de suite.

Calculer les rayons de tous ces cercles et la limite vers laquelle tend la somme de leurs aires quand le nombre des cercles croit indéfiniment.

Rép. $$\left\{ \begin{array}{l} R_2 = R\dfrac{D - R}{D + R}; \ D_1 = D\dfrac{D - R}{D + R}; \\ R'' = R'\dfrac{D_1 - R_1}{D_1 + R_1} = R\left(\dfrac{D - R}{D + R}\right)^2; \ \text{Limite}\ \dfrac{\pi R(D + R')^2}{4D}. \end{array} \right.$$

2° Composition de deux forces parallèles et de sens contraires.

Physique. — 1° Quelles sont les expériences sur lesquelles est fondée l'assimilation des aimants et des solénoïdes?

2° Quel est le grossissement d'une lunette astronomique, dont l'objectif est de $5^m,50$ de longueur focale lorsqu'on y adapte un oculaire simple dont la longueur focale est de 11^{mm}? L'objectif ayant 25 centimètres de diamètre. Quel est le diamètre de l'anneau oculaire?

Rép. $$\left\{ \begin{array}{l} G = \dfrac{5500}{11} = 500; \\ \text{Diam.} = 0^{cent},05. \end{array} \right.$$

2e Série. *Mathématiques.* — 1° Calculer le volume d'une sphère, sachant que la différence entre ce volume et celui du cube inscrit à la sphère est égale à 1 mètre cube.

Rép. $V = 1^{mc},581$.

2° Composition de deux forces parallèles et de sens contraires.

Physique. — 1° Mesure de la pression atmosphérique, correction relative à la température.

2° Un presbyte ne voit distinctement les objets qu'à une distance de $0^m,50$ au moins; quelle espèce de lentille doit-il employer pour ramener

(*) Ces énoncés et les résultats qui les accompagnent sont empruntés à la collection publiée par la librairie Croville-Morant, collection que nous avons signalée précédemment (*Journal*, p. 92). On trouvera, dans cette publication, les solutions développées.

à $0^m,30$ la distance minima de la vision distincte, et quelle doit être la distance focale de cette lentille?

Rép. $f = 0^m,75$.

3e Série. *Mathématiques.* — On considère une droite AB de longueur a, et les perpendiculaires à ses extrémités. On demande de trouver sur ces perpendiculaires, deux points A′ et B′ tels que l'on ait $BB' = 2AA$ et que la tangente trigonométrique de la différence des angles BAB′ et ABA′ soit égale à une fraction donnée K. Maximum de K.

$$Rép.\ \begin{cases} AA' = a\dfrac{1 \mp \sqrt{1 - 8K^2}}{4K}; \\ \text{Maximum de } K = \dfrac{\sqrt{2}}{4}. \end{cases}$$

2° Définir les zones glaciales, tempérées et torrides, et calculer le rapport de la surface de l'une des zones glaciales à la surface totale de la terre supposée sphérique, sachant que le cosinus de l'obliquité de l'écliptique sur l'équateur est égal à 0.917.

Rép. 0.0415.

Physique. — 1° Lois de l'induction. — Applications.

2° Quelle doit être la capacité d'un vase contenant 1 gramme d'air, pour que cet air exerce, à la température de 0°, une pression de 50 kilogrammes par décimètre carré sur les parois du vase?

Rép. $1^{lit},6$.

4e Série. *Mathématiques.* — On donne un cercle de rayon R et deux rayons perpendiculaires OA et OB. On demande de trouver sur l'arc AB, un point M tel que si l'on fait tourner la figure autour de OA, la moitié du volume engendré par le segment ACM, augmenté du volume engendré par le segment BDM, soit égal au $\frac{1}{8}$ du volume de la sphère ayant R pour rayon. On prendra, pour inconnue, la distance du point M à la droite OB.

$$Rép.\ x = \frac{2R\sqrt{5}}{5}.$$

Démontrer qu'une fraction dont les deux termes sont premiers entre eux est irréductible.

Physique. — 1° Loi du mélange des gaz et des vapeurs.

2° Un objet linéaire de 1 cent. de longueur est disposé perpendiculairement à l'axe d'une lentille divergente, à 7 cent. en avant de son foyer principal. Quelle doit être la distance focale principale de la lentille pour que l'image de l'objet ait 3 millimètres de longueur? — Quelles seront les distances de l'objet et de l'image au centre optique de la lentille?

$$Rép.: \begin{cases} f = 5.25, \\ p = 12.25, \\ p' = 3.675. \end{cases}$$

5e série. *Mathématiques.* — 1° On donne deux droites rectangulaires OP et OQ; et, sur la seconde un point C, situé à une distance connue c du point O. On demande de trouver sur OP deux points A et C connaissant

$\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 = a^2$ et sachant que les angles α et β, d'où l'on voit, du point C, les segments OA et OB, sont complémentaires.

$$Rép.: \ \operatorname{tang}\alpha = \sqrt{\frac{a^2 \pm \sqrt{a^4 - 4c^4}}{2c^2}}.$$

2° Démontrer que l'excès du jour solaire vrai sur le jour sidéral est variable.

Physique. — 1° Voltamètre. — Lois des actions chimiquss des courants soit à l'extérieur, soit à l'intérieur de la pile.

2° Un prisme a pour angle au sommet $A = 60°$; un faisceau parallèle de rayons lumineux simples tombe sur ce prisme en faisant un angle d'incidence I égal à l'angle d'incidence I'. La déviation D du rayon lumineux est de 30°. Quel est l'indice de réfraction de ce prisme?

$$Rép.: \ n = \sqrt{2}.$$

6° série. *Mathématiques.* — Couper une sphère de rayon 1 par un plan, de telle façon que le rapport du nombre mesurant le volume de l'un des segments obtenus au nombre mesurant la surface de la zone correspondante ait une valeur donnée m. Discussion.

$$Rép.: \begin{cases} \text{si } \frac{R}{3} \leqslant m < \frac{3R}{8}, & x = \frac{3R \pm \sqrt{9R^2 - 24mR}}{2}, \\ \text{si } m < \frac{R}{3}, & x = \frac{3R - \sqrt{9R^2 - 24mR}}{2}. \end{cases}$$

2° Calculer sin 2α connaissant tg α.

$$Rép.: \ \sin 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha},$$

Physique. — 1° Comment obtient-on un spectre pur? Raies du spectre — Dans une machine d'Atwood les masses principales pèsent chacune 200^{gr}, le poids additionnel pèse 10^{gr}. Quelle sera la vitesse acquise au bout de 3 secondes en supposant que l'accélération de la pesanteur. au lieu où se fait l'expérience, est de $9^m,8$? Quel serait l'espace parcouru pendant la 4e seconde?

$$Rép.: \ v - 0.69; \ e = 0.805.$$

7° série. *Mathématiques.* — 1° Pour quelles valeurs de m l'équation

$$x^4 - mx^2 + 2m - 1 = 0,$$

a-t-elle toutes ses racines réelles?

$$Rép.: \ \frac{1}{2} \leqslant m \leqslant 2(2 - \sqrt{3}), \ \text{ ou: } 2(2 + \sqrt{3}) \leqslant m \leqslant + \infty.$$

2° Volume engendré par un segment de cercle tournant autour d'un diamètre extérieur au segment.

Physique. — 1° Réfraction d'un faisceau parallèle de lumière simple : 1° à travers une lame de verre à faces parallèles; 2° à travers le système de deux lames parallèles d'indices différents; 3° à travers une lame de verre dont les deux faces ne sont pas parallèles. Qu'arriverait-il, dans ce dernier cas, si l'on substituait, à la lumière simple, de la lumière blanche?

2° Dans le volet d'une chambre noire est percé un trou circulaire dont une lentille fournit l'image réelle sur un écran. Qu'arrivera-t-il si, entre le trou et la lentille on place : 1° un prisme dont l'arête est horizontale; 2° un prisme dont l'arête est verticale, et 3° ces deux prismes à la fois?

8e série. *Mathématiques.* — 1° Trouver trois nombres en progression arithmétique connaissant leur somme $3a$ et leur produit b^3. Quelle est la condition de possibilité du problème? Combien y a-t-il de solutions?

$$Rép. : a - \sqrt{\frac{a^3 - b^3}{a}}, \qquad a + \sqrt{\frac{a^3 - b^3}{a}}.$$

Définition et détermination de la latitude d'un lieu.

Physique. — 1° Par quels procédés peut-on mesurer la force élastique maximum de la vapeur d'eau : 1° au-dessous de 0°; 2° au-dessus de 100°?

2° Détermination expérimentale de la distance focale principale d'une lentille convergente ou divergente.

3° Une lentille astronomique possède un grossissement linéaire égal à 100. Que deviendra-t-il si l'on regarde dans la lunette par le gros bout, c'est-à-dire si l'on substitue l'objectif à l'oculaire, et réciproquement.

$$Rép. : \frac{F}{f} = \frac{1}{100}.$$

QUESTION 276

Solution par M. Émile Borel, élève en Mathématiques élémentaires au Lycée Louis-le-Grand (Sainte-Barbe).

On considère un triangle isocèle ACB; *et, sur la base* AB, *on prend un point* D *tel que* BD = AB.

D'autre part, on élève en A, B *des perpendiculaires aux côtés* AC, BC; *soit* C′ *leur point de rencontre.*

1° La perpendiculaire abaissée de C′ *sur* CD *partage* AB *dans le rapport de* 2 *à* 1;

2° La perpendiculaire élevée, en C, *à* CD *coupant* AC′ *en* H, BC′ *en* K; *on a* CH = HK;

3° On demande la généralisation de ces remarques, en supposant que D *désigne un point quelconque pris sur* AB;

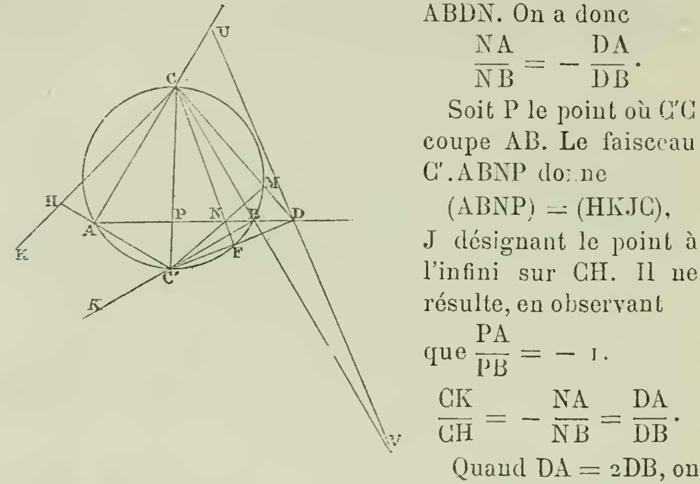
4° D *désignant un point quelconque de* AB, *démontrer que la perpendiculaire élevée, en* D, *à* C′D *est partagée, par les côtés* CA, CB *et par le point* D, *en deux parties égales.*

(Mannheim.)

Nous examinerons, tout de suite, le cas général.

Considérons la circonférence circonscrite au quadrilatère ACBC′. Le pied M de la perpendiculaire abaissée de C′ sur CD appartient à cette circonférence. Le faisceau M.ABCC′ étant

harmonique, il détermine, sur AB, une division harmonique ABDN. On a donc



$$\frac{NA}{NB} = -\frac{DA}{DB}.$$

Soit P le point où C'C coupe AB. Le faisceau C'.ABNP donne

$$(ABNP) = (HKJC),$$

J désignant le point à l'infini sur CH. Il ne résulte, en observant que $\frac{PA}{PB} = -1$.

$$\frac{CK}{CH} = -\frac{NA}{NB} = \frac{DA}{DB}.$$

Quand DA = 2DB, on a $\frac{NA}{NB} = -2$, et CK = 2CH.

Soit F le point où C'D rencontre le cercle. Le faisceau F.ABCC étant harmonique, FC coupe AB au point N conjugué de D. Il en résulte que le faisceau C.ABDF est harmonique et, par suite, que la parallèle menée par D, au rayon CF, rencontre les deux autres rayons, en deux points U, V, tels que DU=DV.

Nota. — Solutions diverses par MM. J.-M. Galban, élève à l'école Polytechnique de Madrid; Alexandre Couvert, élève au lycée Condorcet; E. Baudran, élève au cours de Saint-Cyr, au lycée de Rouen.

QUESTION 285

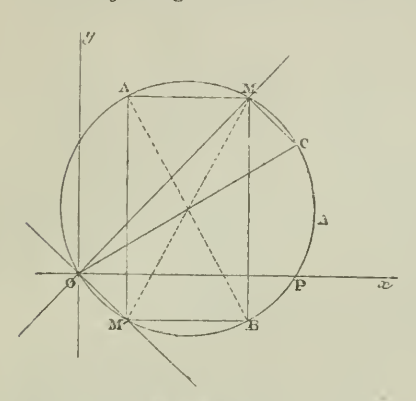
Solution par M. A. Boutin, professeur au Collège de Courdemanche.

On donne un angle droit, de sommet O. On décrit une circonférence Δ passant par O; et l'on prend, sur cette courbe, un point M, tel que les angles compris entre les droites partant de ce point et aboutissant aux extrémités du diamètre OC qui contient O, aient

pour bissectrices des parallèles aux côtés de l'angle donné. On demande le lieu de M lorsqu'on fait varier la circonférence.

(Mannheim.)

Soit xOy l'angle donné, AB le diamètre perpendiculaire au diamètre OC. Les parallèles AM, BM, menées à Oy, Ox, se coupent en un point M du lieu.



L'angle BMO $= 45°$; donc $MOy = 45°$. Le lieu cherché renferme donc la bissectrice de l'angle yOx.

En observant que les parallèles aux droites Ox, Oy, menées par les points A, B, donnent deux points M, M', diamétralement opposés, on voit, finalement, que le lieu est constitué par les bissectrices des deux droites rectangulaires données.

Nota. — Solution analogue par MM. Al. Couvert, élève au lycée Condorcet et J. M. Galban élève à l'École polytechnique de Madrid.

QUESTION 286

Solution par M. A. Boutin, à Courdemanche.

Soient pour abréger :

$N = (ab + cd)(ac + bd)(ad + bc)$,

$\Delta = (-a + b + c + d)(a - b + c + d)(a + b - c + d)(a + b + c - d)$.

Quelles sont les racines carrées des polynômes :

$$4N - a^2\Delta, \qquad 4N - b^2\Delta, \qquad 4N - c^2\Delta, \qquad 4N - d^2\Delta.$$

(Catalan.)

Développons, et ordonnons par rapport à a, les expressions proposées, nous avons

$$N = a^3bcd + a^2\Sigma b^2c^2 + abcd\Sigma b^2 + b^2c^2d^2,$$

$$\Delta = -a^4 + 2a^2\Sigma b^2 + 8abcd - \Sigma b^4 + \Sigma b^2c^2.$$

Donc,

$$4N - a^2\Delta = a^6 - 2a^4\Sigma b^2 - 4a^3bcd + a^2(\Sigma b^2)^2 + 4abcd\Sigma b^2 + 4b^2c^2d^2,$$

ou
$$4N - a^2\Delta = (a^3 - a\Sigma b^2 - 2bcd)^2.$$

Ainsi :

$$\sqrt{4N - a^2\Delta} = 2a^3 - a(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - 2bcd\,;$$

et, de même :

$$\sqrt{4N - b^2\Delta} = 2b^3 - b(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - 2acd,$$
$$\sqrt{4N - c^2\Delta} = 2c^3 - c(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - 2abd,$$
$$\sqrt{4N - d^2\Delta} = 2d^3 - d(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - 2abc.$$

Remarque. — Le polynôme $x^3 - (a^2 + b^2 + c^2)x - 2abc$ est celui que l'on rencontre dans la solution d'un problème de Newton, et dans un problème relatif à l'ellipsoïde (E. C.)(*).

QUESTION PROPOSÉE

326. — Soient ABC un triangle rectangle en A, AH la hauteur issue de A, HK la perpendiculaire abaissée de H sur AB. CK coupe AH en I. Démontrer que la perpendiculaire abaissée de I sur AC coupe ce côté au même point que la symédiane issue de B. *(d'Ocagne.)*

ERRATA

1° P. 101 ; l. 2 ; *supprimez* il en est de même des deux centres isogones.
Id. ; l. 5 ; *supprimez* la ligne.
2° P. 119 ; l. 16 ; *au lieu de* aux, *lisez* et des.
3° P. 120 ; l. 4 ; *au lieu de*

$$\rho_2 = \frac{2}{9}(a_2 + b_2 + c_2)$$

lisez

$$\rho_2 = \frac{2}{9}(a^2 + b^2 + c^2).$$

(*) Voir *Mélanges mathématiques*, t. III, p. 191.

Le Directeur Gérant,
G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 11984-6-9.

DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE DE L'INÉGALITÉ

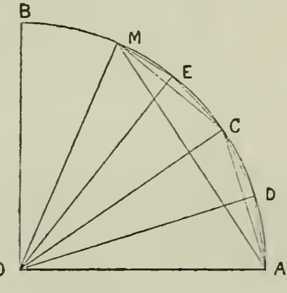
$$x - \sin x < \frac{x^3}{6} \cdot \ (*)$$

Par M. **Desmons**, professeur au lycée Janson de Sailly.

L'expression $x - \sin x$ représente le double de l'aire du segment ACM, dont l'arc AM $= x$, est supposé positif et inférieur à $\frac{\pi}{2}$, dans le cercle de rayon 1.

Il suffit de chercher une limite supérieure de cette aire.

Inscrivons, dans l'arc, une ligne brisée régulière, en prenant d'abord le point C milieu de l'arc AM, puis les points D, E milieux des arcs AC et CM, etc.



Soient $C_1, C_2, C_3, \ldots$ les longueurs des cordes successives, AM, AC, AD ..; $f_1, f_2, f_3 \ldots$ celles des flèches des arcs correspondants; on a

$$2\text{aire ACM} = \lim(C_1.f_1 + 2C_2.f_2 + 4C_3.f_3 + \ldots).$$

Les égalités

$$C_1 = 2\sin\frac{x}{2}, \qquad f_1 = 1 - \cos\frac{x}{2} = 2\sin^2\frac{x}{4};$$

donnent
$$C_1.f_1 = 4\sin\frac{x}{2}\sin^2\frac{x}{4};$$

et, par suite,

$$C_1.f_1 < 4\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{4}\right)^2 < \frac{x^3}{8}.$$

On trouve, de même,

On pourra comparer cette démonstration avec celle qu'a donnée Vincent dans les *Nouvelles Annales*, 1842, p. 273 et que M. Serret a reproduite au chapitre II de sa Trigonométrie.

$$C_2.f_2 < \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^3}{8} < \frac{x^3}{8^2},$$

ou
$$2C_2.f_2 < \frac{x^3}{8.4};$$

et ainsi de suite. On a donc, finalement,
$$x - \sin x < \frac{x^3}{8}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots\right),$$

ou
$$x - \sin x < \frac{x^3}{8}\cdot\frac{4}{3},$$

ou, finalement
$$x - \sin x < \frac{x^3}{6}.$$

SUR LA CONSTRUCTION
D'UNE TABLE DES NOMBRES PREMIERS

Par **M. Loir.**

---

1. — Les tables des nombres premiers, construites d'après le principe d'Eratosthènes (*), sont journellement consultées avec grand avantage; aussi les calculateurs regrettent-ils, très souvent, de n'en pas avoir une plus complète; car ils n'ont pas facilement à leur disposition, bien qu'il ait été imprimé à Paris, en 1817, l'ouvrage de M. Burckardt, du Bureau des longitudes de France, donnant les nombres premiers jusqu'à 4,000,000.

Ils hésitent à prolonger celles qu'ils possèdent, parce qu'ils ne pourraient obtenir, qu'à la suite de longs et pénibles tâtonnements, les derniers multiples impairs des nombres premiers antérieurs, dont le procédé du crible exigerait la connaissance.

J'ai pensé qu'il serait utile de rappeler deux procédés sûrs et rapides pour déterminer ces amorces nécessaires.

(*) On sait d'ailleurs que ce *principe* n'est pas le plus simple que l'on puisse employer. Voir le *Manuel d'Arithmétique et d'Algèbre* de M. Catalan.

Par exemple, si l'on veut prolonger une table allant jusqu'à 10000, nous aurons à trouver, à partir de ce nombre, les premiers nombres impairs multiples des nombres premiers antérieurs.

Premièrement. — On divisera 10000 par le nombre premier que l'on considère; puis on retranchera, de 10000, le reste de cette division. Si la différence obtenue est paire, on y ajoutera le nombre premier; si la différence est impaire, on y ajoutera le double du nombre premier. Le nombre, ainsi formé, sera le plus petit multiple impair du nombre premier; son quotient, par le nombre premier, fournira un ou plusieurs autres nombres premiers.

On aura :

Pour 17 : $10000 = 17.588 + 4$

$10000 - 4 + 17 = 10013 = 17.19.31$

Pour 53 : $10000 = 53.188 + 36$

$10000 - 36 + 53 = 10017 = 53.7.27$

Pour 13 : $10000 = 13.769 + 3$

$10000 - 3 + 2.13 = 10023 = 13.3.257$

Pour 61 : $10000 = 61.163 + 57$

$10000 - 57 + 2.61 = 10065 = 61.3.5.11$

Quand le nombre d'où l'on part est impair; si la différence est impaire, on ajoutera le double du nombre premier ; si la différence est paire, on ajoutera le nombre premier.

Secondement. — On prendra les formules générales des multiples impairs des nombres premiers

$$N = 7 + 14x$$
$$N = 11 + 22x$$
$$N = 13 + 26x$$
$$\cdots\cdots$$
$$N = p + 2px.$$

Les valeurs de x, correspondant aux premiers multiples impairs, après 10000, seront données par la partie entière du quotient de 10000 par le double du nombre premier. On forcerait le chiffre des unités de ce quotient, si le reste de la division était plus grand que le nombre premier.

Il viendrait :

Pour 7 : $10000 = 14.714 + 4$, $N = 7 + 14.714 = 10003$.
Pour 11 : $10000 = 22.454 + 12$, $N = 11 + 22.455 = 10021$.
Pour 23 : $10000 = 46.217 + 18$, $N = 23 + 46.217 = 10005$.
Pour 73 : $10000 = 146.68 + 72$, $N = 73 + 146.68 = 10001$.

On s'arrêtera au nombre premier immédiatement inférieur à la racine carrée du nombre que l'on veut atteindre ; ainsi pour 11000, on ira jusqu'à 103, puisque $(107)^2 = 11440$.

Le tableau des premiers multiples impairs des nombres premiers étant obtenu, on appliquera la méthode du crible à la suite des nombres impairs jusqu'à 11000 ; soit en les comptant de p en p ; soit par l'ouverture d'un compas, comme l'a indiqué Hinderburger ; soit par le châssis troué de Burckardt.

Pour les nombres premiers les plus faibles, dont les multiples sont contenus un grand nombre de fois entre les deux limites, j'emploie une méthode qui se rapporte aux considérations énoncées dans une Note *(Sur la représentation graphique des diviseurs d'un nombre)* présentée à l'Institut, le 2 juillet 1888, par M. Saint-Loup.

Les formules générales des multiples impairs des nombres premiers, $y = p + 2px$, correspondent à des lignes droites, j'en utilise la construction.

On rangera la série des nombres impairs de 1 à 999, que l'on doit essayer, par colonnes verticales, contenant vingt-cinq nombres, placées à côté les unes des autres, en suivant les indications très précises de Burckardt.

On joindra, par une ligne droite, un point choisi, du plus petit multiple de la première colonne (ce point choisi sera le centre du carré qui contient ce nombre, ou mieux le sommet inférieur de droite de ce carré) avec le point convenu, du plus petit multiple de la seconde colonne ; on aura ainsi une première direction. On obtiendra une seconde direction, en joignant ce premier multiple de la première colonne avec le deuxième multiple de la deuxième colonne ou de la troisième colonne. Dans le cas où les deux multiples, considérés, de la deuxième colonne seraient au-dessous du premier multiple de la première colonne, on aurait cette seconde direction, en

joignant le premier multiple de la deuxième colonne, au second multiple de la première colonne.

Nous ferons observer que, pour un même nombre premier, l'angle formé par ces deux directions, tracées dans les mêmes conditions, est constant, quel que soit le premier nombre adopté.

On mène des lignes parallèles à ces deux directions partant des points convenus, des multiples de la première colonne, et de ceux que l'on a trouvés; les diverses parallèles passant par le point convenu des autres multiples; les deux systèmes de parallèles se couperont au point convenu, pour tous les multiples du nombre premier compris entre les deux limites.

Pour continuer des recherches ultérieures, on pourrait employer des tableaux, imprimés à l'avance, des nombres impairs allant de 1 à 999, en colonnes verticales également espacées, semblables à celui sur lequel on a tracé les lignes pour 17 et 7 (*).

Ces feuilles serviraient pour tous les autres nombres; alors il serait très commode de faire usage d'équerres à branches mobiles, formant un angle égal à celui des deux directions indiquées pour chaque nombre premier. Mais comme la multiplicité des lignes tracées sur une même feuille amènerait une certaine confusion, on continuera l'ensemble des opérations, en ayant recours aux précieux châssis troués de Burckardt, que l'on construirait, très aisément, d'après ce que nous avons exposé ci-dessus.

Supposons que l'on veuille, avec l'aide de ces châssis, déterminer les multiples, ceux de 19, par exemple, compris entre 10000 et 11000. Le premier de ces multiples est 10013. On placera le châssis sur la case 13, ses autres trous correspondront à divers nombres; en les ajoutant à 10000 on aurait un certain nombre des multiples de 19. On déplacera le châssis plusieurs fois suivant ses dimensions pour couvrir toute la feuille, en ayant bien soin de le poser sur un nombre déjà obtenu on trouvera ainsi tous les autres multiples de 19.

Par une marche inverse, l'emploi de ces châssis permettrait de reconnaître si des erreurs ont été commises.

(*) Voir la figure placée, en supplément, dans le présent numéro.

DISTANCE DE DEUX POINTS
EN COORDONNÉES BARYCENTRIQUES

Par M. **H. Plamenevsky**, maître à l'école réale de Femir-Khan-Choura.

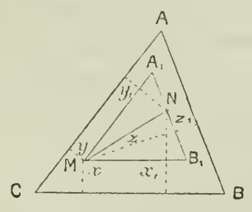
1. — J'ai trouvé naguère, pour exprimer le carré de la distance de deux points donnés, en coordonnées normales, la formule

$$\text{(I)} \qquad \delta^2 = -\frac{abc}{4S^2}[a(y_1 - y)(z_1 - z) + b(x_1 - x)(z_1 - z) + c(x_1 - x)(y_1 - y)],$$

ou, en coordonnées barycentriques,

$$\text{(II)} \quad \delta^2 = -\frac{a^2(\beta_1-\beta)(\gamma_1-\gamma)+b^2(\alpha_1-\alpha)(\gamma_1-\gamma)+c^2(\alpha_1-\alpha)(\beta_1-\beta)}{S^2}.$$

De la Note de M. A. Boutin sur la distance de deux points (*Journal* p. 74), il faut conclure que cette formule, si simple, est encore inconnue. Nous indiquerons ici comment on peut l'établir par des considérations très élémentaires.



Soient x, y, z et x_1, y_1, z_1 les coordonnées normales des points M et N. Menons, par M, deux parallèles aux côtés BC et AC du triangle donné ; et, par N, une parallèle à AB : ces droites forment un nouveau triangle MA_1B_1.

En observant que les triangles ABC et MA_1B_1 sont semblables nous avons

$$MB_1 = CB.\frac{z - z_1}{\left(\frac{2S}{AB}\right)} = ac\,\frac{z - z_1}{2S};$$

$$MA_1 = bc\,\frac{z - z_1}{2S}; \qquad A_1B_1 = c^2\,\frac{z - z_1}{2S}.$$

D'ailleurs

$$NA_1 = MA_1\frac{y_1 - y}{z - z_1} = bc\frac{y_1 - y}{2S}; \qquad NB_1 = MB_1\frac{x_1 - x}{z - z_1} = ac\frac{x_1 - x}{2S}.$$

Le théorème de Stewart, appliqué au triangle MA_1B_1, donne

$$\overline{MN}^2 = \frac{MB_1^2.NA_1 + MA_1^2NB_1 - NA_1.NB_1.A_1B_1}{A_1B_1}.$$

Dans cette formule, remplaçons MA_1, MB_1,..... par les valeurs trouvées plus haut ; nous aurons

$$\delta^2 = \frac{\frac{a^2c^2(z-z_1)^2}{4S^2}.bc\frac{y_1-y}{2S} + b^2c^2\frac{z-z_1}{4S^2}ac\frac{x_1-x}{2S^2} - \frac{abc^4(z-z_1)(y_1-y)(x_1-x)}{4S^2.2S}}{c^2\frac{z-z_1}{2S}},$$

ou

$$\delta^2 = \frac{abc}{4S^2}[a(y_1-y)(z-z_1) + b(x_1-x)(z-z_1) - c(y_1-y)(x_1-x)],$$

formule qu'on peut écrire :

$$(1) \qquad \delta^2 = -\frac{abc}{4S^2}\Sigma a(y_1 - y)(z_1 - z).$$

En posant $ax = 2\alpha$, $by = 2\beta$, $cz = 2\gamma$, nous avons, aussi,

$$(2) \qquad \delta^2 = -\frac{\Sigma\alpha^2(\beta_1 - \beta)(\gamma_1 - \gamma)}{S^2}.$$

2. — Si, dans la formule (2), on considère α, β, γ comme des coordonnées courantes, on a l'équation d'un cercle qui a pour rayon δ et pour centre le point $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$. Nous nous proposons de vérifier l'identité de cette formule avec l'équation donnée par M. G. de Longchamps (*).

En effet, on peut écrire l'équation (II) :

$$(\mathrm{II}_1) \quad (\alpha + \beta + \gamma)^2\delta^2 + a^2\beta\gamma + b^2\alpha\gamma + c^2\alpha\beta + a^2\beta_1\gamma_1 + b^2\alpha_1\gamma_1 + c^2\alpha_1\beta_1 - \alpha(\gamma_1b^2 + \beta_1c^2) - \beta(\gamma_1a^2 + \alpha_1c^2) - \gamma(\beta_1a^2 + \alpha_1b^2) = 0.$$

Remarquons que la distance d'un point quelconque, $[\alpha_1, \beta_1, \gamma_1]$, au sommet A [S, o, o′], d'après notre formule (II), est

$$(\mathrm{III}) \quad \rho_a^2 = \frac{b^2\gamma_1 + c^2\beta_1}{S} - \frac{a^2\beta_1\gamma_1 + b^2\alpha_1\gamma_1 + c^2\alpha_1\beta_1}{S^2}\ldots;$$

d'où $\alpha(\gamma_1b^2 + \beta_1c^2) = S\alpha\rho_a^2 + \dfrac{a^2\beta_1\gamma_1 + b^2\alpha_1\gamma_1 + c^2\alpha_1\beta_1}{S}\alpha.$

(*) *Sur un nouveau cercle remarquable, Journ. de Math. spéc.*, t. V., 1886, p. 577.

De même,

$$\beta(\gamma_1 a^2 + \alpha_1 c^2) = S\beta\rho_b^2 + \frac{a^2\beta_1\gamma_1 + b^2\alpha_1\gamma_1 + c^2\alpha_1\beta_1}{S}\beta,$$

$$\gamma(\beta_1 a^2 + \alpha_1 b^2) = S\gamma\rho_c^2 + \frac{a^2\beta_1\gamma_1 + b^2\alpha_1\gamma_1 + c^2\alpha_1\beta_1}{S}\gamma.$$

Par suite, l'équation (II_1) se réduit à celle qu'a donnée M. G. de Longchamps;

$$(\alpha + \beta + \gamma)[\alpha(\delta^2 - \rho_a^2) + \beta(\delta^2 - \rho_b^2) + \gamma(\delta^2 - \rho_c^2)] + a^2\beta\gamma + b^2\alpha\gamma + c^2\alpha\beta = 0.$$

Dans cette formule : $\delta^2 - \rho_a^2$, $\delta^2 - \rho_b^2$, $\delta^2 - \rho_c^2$ représentent, respectivement, les puissances des sommets du triangle, par rapport au cercle considéré.

SUR LES CENTRES ISODYNAMIQUES

ET SUR LES CENTRES ISOGONES

Par M. **A. Boutin**, professeur au Collège de Courdemanche.

(*Suite*, voir p. 123.)

VIII. — P_1, P_2, centres des triangles équilatéraux podaires, sont respectivement les milieux de VV_2, WW_2.

Soient x, x_1, x_2, les distances à BC de V, du milieu de VV_2, et de V_2 ; on a, d'après les valeurs des coordonnées barycentriques de V et V_2, (à un facteur constant près) :

$$x = \frac{h \sin A \cos (A - 30^\circ)}{\Sigma \sin A \cos (A - 30^\circ)},$$

$$x_2 = \frac{h \sin A \cos (B - 30^\circ) \cos (C - 30^\circ)}{\Sigma \sin A \cos (B - 30^\circ) \cos (C - 30^\circ)},$$

$$x_1 = x + x_2 = \frac{h \sin A \cos (A - 30^\circ)}{\Sigma \sin A \cos (A - 30^\circ)} + \\ + \frac{h \sin A \cos (B - 30^\circ) \cos (C - 30^\circ)}{\Sigma \sin A \cos (B - 30^\circ) \cos (C - 30^\circ)},$$

$$x_1 = \cos (A - 30^\circ)\Sigma \sin A \cos (B - 30^\circ) \cos (C - 30^\circ) + \\ + \cos (B - 30^\circ) \cos (C - 30^\circ)\Sigma \sin A \cos (A - 30^\circ).$$

Mais, identiquement :

$$\Sigma \sin A \cos (B - 30^\circ) \cos (C - 30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Sigma \sin A \cos (A - 30^\circ);$$

donc

$$x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos (A - 30^\circ) + \cos (B - 30^\circ) \cos (C - 30^\circ),$$

ou $$x_1 = 2 \sin B \sin C + \sqrt{3} \sin A;$$

ce qui est la distance de P_1 à BC (VII).

Donc P_1 est le milieu de VV_2.

On verrait, de même, que P_2 est le milieu de WW_2.

IX. — La ligne $V_2 W_2$, des isogones, contient le point de Lemoine.

Les coordonnées normales des centres isogones, et l'équation de la droite qui les joint, sont :

$$(1) \begin{cases} x : \cos (A - 30^\circ), \; y : \cos (B - 30^\circ), \; z : \cos (C - 30^\circ), \\ x_1 : \cos (A + 30^\circ), \; y_1 : \cos (B + 30^\circ), \; z_1 : \cos (C + 30^\circ) \end{cases}$$

$$(2) \quad (yz_1 - zy_1) X + (zx_1 - xz_1) Y + (xy_1 - yx_1) Z = 0;$$

où (x, y, z) (x_1, y_1, z_1) ont les valeurs déduites de (1). Le point de Lemoine K, sera sur cette droite, si (2) est vérifiée par les relations :

$$\frac{X}{\sin A} = \frac{Y}{\sin B} = \frac{Z}{\sin C},$$

qui caractérisent K. On doit donc avoir identiquement :

$$\Sigma \sin A [\text{séc}(B - 30^\circ) \text{séc}(C + 30^\circ) - \text{séc}(C - 30^\circ) \text{séc}(B + 30^\circ)] = 0;$$

ce qui revient à

$$\Sigma \sin A \cos(A - 30^\circ) \cos(A + 30^\circ) \sin(C - B) = 0,$$

identité aisée à vérifier.

Il résulte, de ce fait et de (II), (VII), et que les trois droites : VW, P_1P_2, V_2W_2 sont concourantes : leur point de concours est le point de Lemoine.

X. — Les droites VV_2, WW_2, et la droite d'Euler (OGH) sont parallèles.

Soient, en coordonnées normales, les équations de deux droites :

$$\lambda x + \mu y + \nu z = 0;$$
$$\lambda' x + \mu' y + \nu' z = 0.$$

La condition de parallélisme est

$$\Sigma \sin A(\mu\nu' - \nu\mu) = 0.$$

L'équation de VV_2 est :

$$\sum\left(\frac{\cos(B - 30^\circ)}{\cos(C - 30^\circ)} - \frac{\cos(C - 30^\circ)}{\cos(B - 30^\circ)}\right)x = 0,$$

ou

$$\Sigma \sin^2(A + 60^\circ) \sin(B - C)x = 0.$$

L'équation de la droite d'Euler est :

$$\Sigma \sin 2A \sin(B - C)x = 0.$$

La condition de parallélisme de ces droites, est :

$$\sum\left[\begin{array}{l} \sin^2(B + 60^\circ) \sin 2C \sin(A - B) \sin(C - A) \\ - \sin^2(C + 60^\circ) \sin 2B \sin(A - B) \sin(C - A) \end{array}\right] \sin A = 0,$$

ou

$$\Sigma \sin A \sin(A - B) \sin(C - A)\left[\begin{array}{l} \sin 2C \sin^2(B + 60^\circ) \\ - \sin 2B \sin^2(C + 60^\circ) \end{array}\right] = 0.$$

La quantité entre crochets s'écrit successivement (à un facteur constant près)

$$\sin 2C(\sin^2 B + 3\cos^2 B + 2\sqrt{3} \sin B \cos B)$$
$$- \sin 2B(\sin^2 C + 3\cos^2 C + 2\sqrt{3} \sin C \cos C),$$

ou

$$\sin 2C - (\sin 2B + 4\cos C \cos B \sin(C - B);$$

d'où, pour l'identité à vérifier :

$$\Sigma \sin A(\cos A - 2\cos B \cos C) \equiv 0,$$
$$\Sigma \sin A(\sin B \sin C - 3\cos B \cos C) \equiv 0;$$

laquelle est manifeste.

On constaterait de même le parallélisme de WW_2 et OGH. Il en résulte que VV_2, WW_2 sont parallèles.

On peut d'ailleurs vérifier le fait directement pour ces deux droites. L'équation de WW_2 est :

$$\Sigma \sin^2(A - 60^\circ) \sin(B - C)x = 0.$$

La condition de parallélisme est :

$$\Sigma \sin A \sin(A - B)\sin(C - A)\left[\begin{array}{l} \sin^2(C + 60^\circ)\sin^2(B - 60^\circ) \\ - \sin^2(B + 60^\circ)\sin^2(C - 60^\circ) \end{array}\right] \equiv 0,$$

identité facile à reconnaître.

(A suivre.)

ESSAI
SUR LA
GÉOMÉTRIE DE LA RÈGLE ET DE L'ÉQUERRE
(SECONDE PARTIE)

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite*, voir p. 129.)

125. La hauteur du mât. — On suppose un mât BC, placé au-dessus d'une tour AB; on propose de trouver la longueur de BC.

On sait comment on résout ordinairement ce problème, en considérant BC comme la différence des hauteurs AC, AB. Mais ce procédé est long : il nous paraît plus simple de traiter directement la question, comme nous allons l'indiquer.

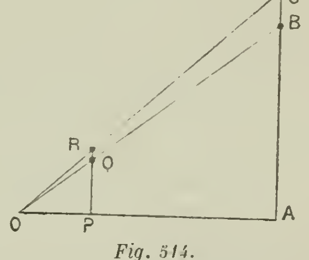


Fig. 514.

Entre un point O, arbitrairement choisi, et la tour, plaçons une mire dont la partie mobile puisse être placée successivement de façon à masquer les points B, C à l'œil de l'observateur, placé en O; puis, relevons les hauteurs : $PQ = h$, $PR = h'$.

Ayant posé

$$BC = x, \qquad AP = y, \qquad OP = d,$$

on a

$$(1) \qquad \frac{x}{h' - h} = \frac{y + d}{d}.$$

En répétant, dans une seconde station, les opérations précédentes, on aura, de même,

$$(2) \qquad \frac{x}{H' - H} = \frac{y + D}{D}.$$

Les égalités (1) et (2), donnent

$$x\left(\frac{d}{h' - h} - \frac{D}{H' - H}\right) = d - D.$$

Cette formule permet de calculer x; il faut seulement supposer $d - D \neq 0$; or, pour que cette condition soit vérifiée, il suffit de se placer à des distances inégales du pied de la tour.

126. Les problèmes de la tour dont le pied est invisible. — La solution précédente mérite d'être remarquée pour les conséquences qu'elle comporte. On voit que les égalités (1), (2), permettent aussi de calculer y, c'est-à-dire la distance de l'observateur au pied de la tour. De plus, comme on a

$$\frac{x}{h' - h} = \frac{AB}{h},$$

on peut trouver AB, après avoir calculé x. D'après cette remarque on résout donc tous les problèmes de la tour, dont le pied est non seulement inaccessible, mais même invisible; comme il arrive lorsque sa base est masquée par des bâtiments qui l'entourent de tous côtés.

Pour traiter complètement le problème qui nous occupe, il nous reste pourtant, en nous plaçant encore dans le cas particulier que nous examinons ici, à déterminer le rayon de la tour.

A cet effet, on distingue sur la circonférence supérieure trois points I, J, K. Une mire, de longueur h, étant placée successivement en A′, I″, B′, J′, de façon que les droites II′, JJ′ viennent passer par l'œil O de l'observateur, on relève la longueur PQ = I′J′.

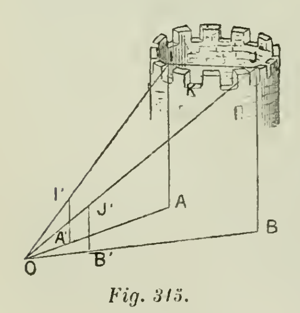


Fig. 315.

On a, d'ailleurs,

$$\frac{IJ}{I'J'} = \frac{OI}{OI'} = \frac{OP}{OA}.$$

OP est une longueur connue, OA se calcule comme nous l'avons vu; par suite, IJ peut être déterminé. En opérant de même pour les cordes IK, JK, on aura finalement les trois côtés d'un triangle inscrit à la circonférence qui forme la crête de la tour; et, par suite, son rayon.

Mais, il est presque inutile de le faire observer, nous indiquons une pareille solution, surtout à titre de curiosité, pour

montrer comment la géométrie que nous avons développée dans cet ouvrage répondrait aux difficultés qu'on pourrait lui soumettre. Cette remarque est applicable à la solution présentée au paragraphe suivant.

127. La tour rectangulaire. — Dans le cas où la tour inaccessible considérée affecte la forme d'un donjon rectangulaire; ou encore, dans le cas d'un bâtiment à faces perpendiculaires deux à deux; on peut demander les longueurs des côtés du rectangle formant la base de ce donjon, ou de ce bâtiment, quel qu'il soit.

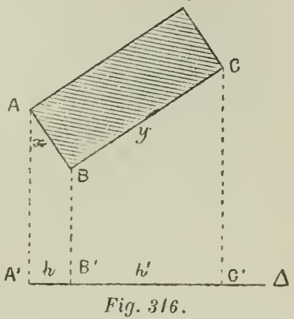


Fig. 316.

Soient A, B, C les pieds des trois arêtes que l'on aperçoit. Perpendiculairement à une direction arbitraire AA′, traçons une droite Δ et, au moyen de l'équerre ordinaire, déterminons les points B′, C′ projections des points B, C, sur Δ.

En posant :

$$BA = x, \quad BC = y, \quad A'B' = h, \quad B'C' = h'$$

on voit, sans peine, que l'on a

$$(1) \qquad \frac{h^2}{x^2} + \frac{h'^2}{y^2} = 1 .$$

En traçant, par rapport à une autre direction, une droite telle que Δ, on obtiendra une seconde équation du même genre que (1). En résolvant ces deux équations par rapport à $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{y^2}$, on pourra finalement calculer les inconnues x, y.

128. — Détermination des hauteurs; solution générale. — Avant d'aller plus loin, dans ce sujet, nous voulons indiquer ici une solution qui nous paraît, également bien, applicable aux grandes ou aux petites hauteurs et que nous appellerons *la solution générale*. Pour la rendre pratique, dans les différents cas qui pourraient se présenter, il faudrait seulement modifier la base d'opérations, en prenant celle-ci d'autant plus grande que la hauteur observée serait elle-même plus considérable.

Soit I le point considéré dans l'espace. Ayant pris une certaine base OO′ sur la trace horizontale (*) du plan vertical renfermant OI, on relève avec la fausse équerre, si l'on n'a pas d'instrument plus parfait, les angles IOO′, IO′O et l'on trace, sur le plan horizontal, des droites Δ, Δ′ faisant avec OO′, respectivement, angles les qui ont été observés. Traçons alors OS, bissectrice de O′OΔ ; puis SR parallèle à Δ. Une propriété connue (**) donne

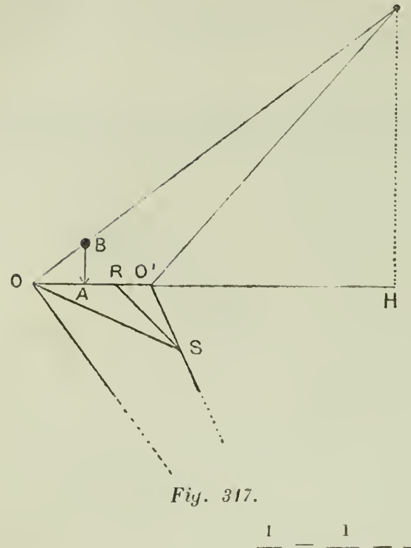


Fig. 317.

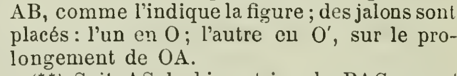
$$\frac{1}{OI} = \frac{1}{OR} - \frac{1}{OO'}.$$

Cette formule est remarquable, car elle permet de connaître très rapidement la distance à laquelle on se trouve du point inaccessible considéré.

Si l'on veut, particulièrement, déterminer la hauteur IH, on utilisera, après avoir calculé OI, la formule

$$IH = AB.\frac{OI}{\sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{AB}^2}}.$$

(A suivre.)

(*) Cette trace s'obtient, comme on sait, en plaçant une longue mire

AB, comme l'indique la figure ; des jalons sont placés : l'un en O ; l'autre en O′, sur le prolongement de OA.

(**) Soit AS la bissectrice de BAC ; ayant mené SD parallèle à AB ; puis, SE parallèle à AC ; les triangles semblables SDC, BES, donnent

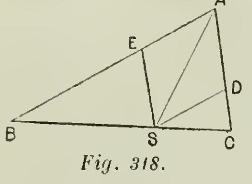


Fig. 318.

$$\frac{SD}{AB - SD} = \frac{AC - SE}{SE}.$$

En observant que SD = SE, il vient

$$\frac{1}{SD} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}.$$

EXERCICES DIVERS

Par M. **A. Boutin**, professeur au Collège de Courdemanche.

(*Suite*, voir p. 132.)

122. — Trouver, dans le plan d'un triangle, un point tel que les parallèles l, m, n, menées par ce point, aux côtés du triangle, soient proportionnelles aux carrés des côtés correspondants.

x, y, z étant les coordonnées normales d'un point quelconque M, on a

$$\frac{l}{a} = \frac{h-x}{h} = \frac{ah-ax}{ah} = \frac{\beta+\gamma}{\alpha+\beta+\gamma};$$

α, β, γ étant les coordonnées barycentriques du point cherché. On doit donc résoudre le système :

$$\frac{\beta+\gamma}{a} = \frac{\alpha+\gamma}{b} = \frac{\alpha+\beta}{c};$$

d'où

$$\frac{\alpha}{p-a} = \frac{\beta}{p-b} = \frac{\gamma}{p-c},$$

ou

$$\frac{\alpha}{\cot\frac{A}{2}} = \frac{\beta}{\cot\frac{B}{2}} = \frac{\gamma}{\cot\frac{C}{2}}.$$

Le point cherché est donc le point de Nagel, du triangle ABC.

123. — Des sommets d'un triangle, comme centres, on décrit des cercles de rayon p, q, r. Trouver le centre radical de ces cercles.

Soient M ce centre radical, A_1, B_1, C_1 ses projections sur a, b, c;

$$BA_1 = \alpha \qquad CA_1 = \gamma$$

A_1M, C_1M, les axes radicaux des cercles (q, r), (p, q). On a :

$$\alpha^2 - \gamma^2 = q^2 - r^2,$$
$$\alpha + \gamma = a,$$
$$\alpha - \gamma = \frac{q^2 - r^2}{a};$$

$$\alpha = \frac{a^2 + q^2 - r^2}{2a}. \qquad \text{De même,} \qquad BC_1 = \frac{c^2 + q^2 - p^2}{2c}.$$

Soient x, y, z, les coordonnées normales du point cherché. En coordonnées rectangulaires, B étant l'origine, les équatious de MA_1, BC_1, dont :

$$\alpha = \frac{a^2 + q^2 - r^2}{2a}$$

$$x \sin B - \frac{c^2 + q^2 - p^2}{2c} + \alpha \cos B = 0.$$

Si dans la seconde on remplace α par sa valeur, elle donne

$$4Sx = abc \cos A + bq^2 \cos C + cr^2 \cos B - ap^2.$$

De même $4Sy = abc \cos B + ap^2 \cos C + cr^2 \cos A - bq^2$

$$4Sz = abc \cos C + ap^2 \cos B + bq^2 \cos A - cr^2$$

Si $p = q = r$, on a :

$$x = R \cos A, \quad y = R \cos B, \quad z = R \cos C :$$

le point M est alors le centre du cercle circonscrit à ABC, ce qu'on pouvait prévoir *a priori*.

124. — Soit θ l'angle de Brocard d'un triangle ABC, et φ l'angle déterminé par la formule

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C.$$

Posons en outre

$$\operatorname{cotg}\theta_1 = \operatorname{cotg}\frac{A}{2} + \operatorname{cotg}\frac{B}{2} + \operatorname{cotg}\frac{C}{2}, \quad \operatorname{tg}\varphi_1 = \operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2},$$

$$\operatorname{cotg}\theta_2 = \operatorname{cotg}\frac{A}{4} + \operatorname{cotg}\frac{B}{4} + \operatorname{cotg}\frac{C}{4}, \quad \dots\dots$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$\operatorname{cotg}\theta_n = \operatorname{cotg}\frac{A}{2^n} + \operatorname{cotg}\frac{B}{2^n} + \operatorname{cotg}\frac{C}{2^n}, \quad \operatorname{tg}\varphi_n = \operatorname{tg}\frac{A}{2^n} + \operatorname{tg}\frac{B}{2^n} + \operatorname{tg}\frac{C}{2^n},$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

Sommer les suites illimitées

$$S = \operatorname{cotg}\theta + \frac{1}{2}\operatorname{cotg}\theta_1 + \frac{1}{4}\operatorname{cotg}\theta_2 + \cdots \quad + \frac{1}{2^n}\operatorname{cotg}\theta_n + \cdots$$

$$S' = \operatorname{tg}\varphi + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi_1 + \frac{1}{4}\operatorname{tg}\varphi_1 + \cdots\cdots \quad + \frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\varphi_n + \cdots$$

On s'appuie sur la formule connue

$$\operatorname{tg} x + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{x}{4} + \cdots \quad + \frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n} + \cdots = \frac{1}{x} 2 \operatorname{cotg} 2x,$$

et on trouve

$$S' = \frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} - 2\Sigma \operatorname{cotg} 2A,$$

$$S' = \frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} - \operatorname{cotg}\theta + \operatorname{tg}\varphi,$$

$$S = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - A} + \frac{1}{\frac{\pi}{2} - B} + \frac{1}{\frac{\pi}{2} - C} + \operatorname{cotg}\theta - \operatorname{tg}\varphi.$$

(A suivre.)

QUESTIONS D'EXAMEN

29. — On donne une parabole P par sa directrice Δ et son foyer F; par un point A, pris sur Δ, on propose de mener les tangentes à P. (*Saint Cyr*, p. 67.)

Sur AF, comme diamètre, on décrit une circonférence qui coupe Δ en deux points B, C. Les tangentes demandées sont AB, AC. On observera que cette construction permet de vérifier que les droites demandées sont rectangulaires.

30. — On connaît les foyers F, F′, les sommets A, A′ et l'axe transverse d'une hyperbole; on propose de lui mener une tangente parallèle à une direction donnée xy.

(*Saint-Cyr*, p. 68.)

Sur AA′, comme diamètre, on décrit un cercle Δ; de F on abaisse une perpendiculaire δ sur xy; cette droite δ rencontre Δ en deux points (réels, imaginaires ou coïncidents) qui appartiennent aux droites cherchées.

Dans le cas où ils sont coïncidents, xy est l'une des directions asymptotiques.

31. — Soient α, β, γ les longueurs des hauteurs d'un triangle ABC; d'un point M, intérieur au triangle, on abaisse des perpendiculaires α′, β′, γ′ sur les côtés; démontrer que

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\beta'}{\beta} = \frac{\gamma'}{\gamma} = 1.$$

(*Saint-Cyr*, p. 73.)

On a $\quad \dfrac{\alpha'}{\alpha} = \dfrac{\text{BMC}}{\text{BAC}}; \quad \dfrac{\beta'}{\beta} = \dfrac{\text{CMA}}{\text{BAC}}, \quad \dfrac{\gamma'}{\gamma} = \dfrac{\text{AMB}}{\text{BAC}}.$

d'où $\quad \dfrac{\alpha'}{\alpha} + \dfrac{\beta'}{\beta} + \dfrac{\gamma'}{\gamma} = \dfrac{\text{BMC} + \text{CMA} + \text{AMB}}{\text{ABC}} = 1.$

On sait comment on généralise cette proposition (pour un point M arbitrairement choisi dans le plan ABC), en faisant pour α′, β′, γ′ la convention de signes adoptée dans le système des coordonnées trilinéaires normales.

32. — Vérifier la relation

$$b^2 \sin 2C - 2bc \sin (B - C) - c^2 \sin 2B = 0.$$

(*Saint-Cyr*, p. 43.)

Il suffit de vérifier que

$$2 \sin^2 B \sin C \cos C - 2 \sin B \sin C \sin (B - C) - 2 \sin^2 C \sin B \cos C = 0.$$

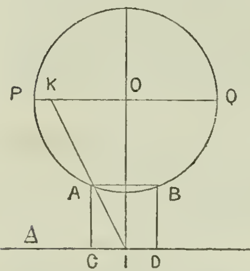
Relation évidente, car elle revient à

$$\sin (B - C) = \sin B \cos C - \sin C \cos B.$$

33. — Soit un cercle O et une droite Δ. On propose d'inscrire un carré ABCD dont la base CD soit située sur Δ ; les sommets A, B appartenant à la circonférence donnée.

(*École navale*, p. 63.)

On sait comment on résout ce problème par la considération des figures homothétiques, en prenant sur le diamètre PQ, parallèle à Δ, $OK = \frac{OI}{2}$; puis, en faisant la construction qu'indique la figure. On sait aussi comment on généralise cette question en, proposant d'inscrire un rectangle semblable à un rectangle donné et comment on la résout en prenant



$$OK = OI . \frac{m}{2n};$$

m, désignant le côté du rectangle donne, qui doit être parallèle à Δ; n étant l'autre côté.

La discussion n'offre aucune difficulté; le problème est possible, si IK rencontre la circonférence O. Lorsque Δ coupe celle-ci, le problème est toujours possible ; il est facile de le montrer *a priori*.

ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE

Concours de 1889

Composition de Mathématiques (3 heures).

I. — Dans un triangle ABC on donne : A = 32456.2 B = 75° 28′ 38″,4 C = 72° 13′ 11″,6. Calculer la hauteur qui correspond au côté BC, et la longueur de la bissectrice de l'angle A.

II. — On donne un triangle isocèle ABC, un point P sur la base BC; mener parallèlement à BC une droite rencontrant AB en M et AC en N, de manière que le rapport $\frac{PM}{NP}$ soit égal à un nombre donné K. Discussion du problème. (On choisira comme données la longueur $AP = l$, les angles $BAP = \beta$, $CAP = \gamma$, et comme inconnue la longueur AM.) On peut aussi déterminer la position de MN par une construction géométrique très simple et indépendante de la solution algébrique; donner encore cette solution géométrique de la question (*).

(*) On considère, sur BC, l'isotomique P′ du point P ; on a $P'M = PN$; et par suite, $K = \frac{PM}{PM'}$, etc.., *G. L.*

III. — Étant données deux circonférenes O et O′ et une tangente commune extérieure AB, on prolonge OO′ jusqu'en C et D, et on mène les droites CA et DB qui se coupent en M. Démontrer que l'angle AMB est droit, et que le point M est sur l'axe radical des deux cercles. Déduire de là une construction des tangentes communes extérieures à deux circonférences, et examiner comment il convient de modifier cette construction pour obtenir les tangentes communes intérieures.

BIBLIOGRAPHIE

Nouvelles tables de logarithmes à cinq et à quatre décimales pour les lignes trigonométriques dans les deux systèmes de la division centésimale et de la division sexagésimale du quadrant et pour les nombres de 1 à 12000 publiées par le service géographique de l'armée, in-8°, 1889. Prix : broché, 4 francs; cartonné, 4 fr. 50. Librairie Gauthier-Villars, 55, quai des Grands-Augustins.

Ce recueil renferme une série de tables de logarithmes à cinq et à quatre décimales qui sont principalement utiles aux géodésiens, aux géomètres et aux astronomes. Il contient en particulier les logarithmes des lignes trigonométriques dans les deux systèmes de la division centésimale et de la division sexagésimale du quadrant.

QUESTION 273

Solution par A. Boutin, professeur au Collège de Courdemanche.

Soit I *le centre d'un cercle tangent aux trois côtés d'un triangle* ABC, *On applique, en ce point, trois forces respectivement proportionnelles à* $\sin\frac{A}{2}$, $\sin\frac{B}{2}$, $\sin\frac{C}{2}$ (*) *et dirigées suivant* IA, IB, IC; *démontrer que la résultante de ces trois forces passe par le centre du cercle circonscrit au triangle considéré.* (G. L.)

On montrera que la question 273 est identique à cette proposition de M. Neuberg :

Si, suivant les perpendiculaires abaissées du centre O *du cercle circonscrit à un triangle* ABC, *sur les côtés de ce triangle, on*

(*) Énoncé rectifié conformément à la note placée, *Journal,* 1888; p. 48.

applique, dans un sens ou dans l'autre trois forces égales, la résultante passera par le centre de l'un des cercles tangents aux trois côtés.

Soient : $K \sin \frac{A}{2}$, $K \sin \frac{B}{2}$. $K \sin \frac{C}{2}$ les forces proposées.

Décomposons la force $K \sin \frac{A}{2}$ en deux autres dirigées suivant IB′, IC′ ; A′, B′, C′ étant les point de contact du cercle inscrit I avec les côtés de ABC. La droite IA étant bissectrice de l'angle B′IC′, les composantes x sont égales ; et l'on a :

$$K^2 \sin^2 \frac{A}{2} = 2x^2 - 2x^2 \cos A = 2x^2(1 - \cos A) = 4x^2 \sin^2 \frac{A}{2};$$

$$x = \frac{K}{2}.$$

De même, les composantes des deux autres forces suivant les mêmes directions OA′, OB′, OC′ seront $\frac{K}{2}$: le système proposé revient donc au système de trois forces égales, dirigées suivant IA′, IB′, IC′. Soit ρ la résultante de ce système, α l'angle qu'elle fait avec BC. Le théorème des projections appliquées aux projection faites sur BC et sur un axe perpendiculaire donne, en supposant que les forces IA′, IB′, IC soient égales à l'unité :

$$\rho \cos \alpha = \sin C - \sin B,$$
$$\rho \sin \alpha = 1 - \cos B - \cos C;$$

d'où

$$\sin^2 \alpha = \frac{(1 - \cos B - \cos C)^2}{(\sin C - \sin B)^2 + (1 - \cos B - \cos C)^2}$$
$$= \frac{[1 + \cos A - (\cos A + \cos B + \cos C)]^2}{3 - 2(\cos A + \cos B + \cos C)}.$$

Or

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2};$$

On a donc
$$\sin^2 \alpha = \frac{\left(\cos A - 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}\right)^2}{1 - 8 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}.$$

L'angle α, ainsi déterminé, est l'angle de IO avec BC (Voir

Desboves. *Questions de Trig.*, p. 146); donc la résultante considérée passe par le centre O du cercle circonscrit à ABC.

2° Supposons que le point I soit le centre du cercle ex-inscrit tangent à α. On verrait, comme plus haut, que le système des forces IA, IB, IC, respectivement égales à $\sin\frac{A}{2}$, $\sin\frac{B}{2}$, $\sin\frac{C}{2}$, peut encore être remplacé par un système de trois forces égales dirigées suivant les perpendiculaires abaissées de I sur les trois côtés. Prenons l'unité sur chacune de ces forces, conservons les mêmes notations. Nous avons

$$\rho\cos\alpha = \sin C - \sin B,$$
$$\rho\sin\alpha = 1 + \cos B + \cos C;$$

d'où

$$\sin^2\alpha = \frac{(1 + \cos B + \cos C)^2}{(1 + \cos B + \cos C)^2 + (\sin C - \sin B)^2}$$
$$= \frac{[1 + \cos A + (\cos B + \cos C - \cos A)]^2}{3 + 2(\cos B + \cos C - \cos A)}.$$

Et comme :

$$\cos B + \cos C - \cos A = 4\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2} - 1,$$

$$\sin^2\alpha + \frac{\left(\cos A + 4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\right)^2}{1 + 8\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}.$$

Cet angle est l'angle de OI′ avec BC (Desboves, *loc. cit.*); donc, dans ce cas encore, la résultante passe par le point O.

Si l'on projette un point quelconque de l'une des droites OI, OI′, OI″, OI‴ sur les trois côtés du triangle ABC, et que, suivant ces projetantes, on applique des forces égales, la direction de ces forces étant le sens des projetantes, les résultantes sont dirigées, respectivement, suivant OI, OI′, OI″, OI‴.

En effet, le théorème étant démontré pour le point I, par exemple; si l'on construit le polygone des forces pour ce point I et pour un point quelconque de OI, ces polygones sont semblables, car leurs angles sont égaux et leurs côtés proportionnels; ils ont leurs côtés parallèles; donc, les deux résultantes sont parallèles; et comme un point de l'une est sur l'autre, il en résulte qu'elles sont confondues.

Le théorème étant démontré pour un point quelconque de OI est vrai, en particulier, pour le point O; ce qui montre l'identité des deux propositions.

QUESTION 274 (*)

Solution par M. E. BAUDRON, cours de Saint-Cyr, Lycée de Rouen.

On donne deux droites rectangulaires OX, OY *et un point* P. *Soit* Δ *une droite quelconque, passant par* P, *et rencontrant* OX *en* A, OY *en* B. *On élève, en* P, *une perpendiculaire* Δ' *à* Δ; Δ' *rencontre* OX *en* A', OY *en* B'. *On abaisse, de ces points* A', B', *des perpendiculaires sur* OP : *ces droites coupent* Δ *aux points* A'', B''. *Démontrer que* A''B'' = AB. (Mannheim.)

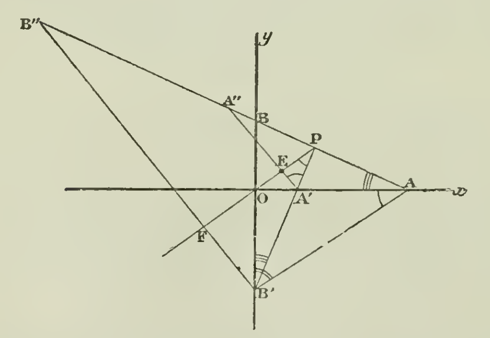
Les droites A'A'' et B'B'' étant parallèles, on a :

$$\frac{A''B''}{PA''} = \frac{A'B'}{PA'};$$

d'où

$$A''B'' = \frac{A'B' \times PA''}{PA'}.$$

Les triangles OAB, O'A'B', ayant leurs côtés perpendiculaires, sont semblables; on a donc



$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OB}.$$

Les angles droits B'OA, B'PA prouvent que le quadrilatère POAB'. est inscriptible

Les angles OAB', OPB' sont donc égaux; par suite, leurs compléments $\widehat{PA'B} = \widehat{OB'A}$, sont égaux. Il en résulte que les triangles rectangles OAB', PA'A'' sont semblables, et que

$$\frac{PA''}{PA'} = \frac{OA}{OB'} = \frac{OB}{OA'}.$$

(*) Voyez, p. 70, une autre solution de cette question.

d'où $$A''B'' = \frac{A'B' \times OB}{OA'} = \frac{AB.OA'.OB}{OA'.OB}.$$

Finalement,

$$A''B'' = AB.$$

Nota. — Solutions trigonométriques par MM, Beyens, capitaine du génie à Cadix; A. Boutin, professeur au collège de Courdemanche.

QUESTIONS PROPOSÉES

327. — Une circonférence Δ, passant par le centre O d'une autre circonférence Δ', coupe celle-ci en A, B. Une corde AM de Δ' rencontre Δ en M'. Démontrer que $BM' = MM'$.

De cette remarque, déduire une solution du problème suivant :

Deux points A, B étant donnés sur une circonférence Δ, trouver sur Δ un point M, tel que $MA + MB$ soit égale à une longueur donnée $2h$.

(B. Sollertinski, professeur à Gatschina, Russie.)

328. — Trois ballons se meuvent en ligne droite avec des vitesses uniformes.

On donne leurs positions à deux instants différents. Construire une ligne droite qui puisse être parcourue par un ballon avec une vitesse uniforme, de telle sorte que les trois premiers ballons paraissent immobiles à l'aréonaute du quatrième. *(Tarry.)*

329. — Quatre trains se meuvent sur des voies rectilignes avec des vitesses uniformes.

On donne leur positions à deux instants différents. Construire une voie rectiligne qui puisse être parcourue par un train avec une vitesse uniforme telle que les quatre premiers trains paraissent immobiles au conducteur du cinquième.

(Tarry.)

330. — Soient OX, OY deux rayons rectangulaires dans un cercle Δ. Par O, on trace deux rayons OA, OB symétriques par rapport à la bissectrice de YOX.

Par B, on mène des parallèles aux droites OX, OY ; elles rencontrent OA aux points I, J.

Démontrer que la polaire de I, relativement à Δ, passe par J.

(G. L.)

331. — On considère deux cercles Δ, Δ′, dont les centres sont les points O, O′. La droite OO′ rencontre Δ, Δ′, respectivement aux points A, B; A′, B′. Soient M, M′ les extrémités de deux rayons mobiles, parallèles, et de même direction. Cela posé, AM, B′M′ se rencontrent en P ; BM, A′M′, en Q.

Démontrer que PQ passe constamment par un point fixe.

(G. L.)

332. — Résoudre l'équation

$$\frac{1}{x(x-a)(x-b)}+\frac{1}{a(a-x)(a-b)}+\frac{1}{b(b-x)(b-a)}+\frac{1}{\alpha x^2-abx-\alpha^3}=0$$

(G. L.)

333. — Sur une droite OA de longueur $2d$, on prend des points qui la partagent en $2n$ parties égales. Aux points de division, on applique des forces parallèles, mesurées par les distances de leurs points d'application au point O. Ces forces ont même direction, mais sont alternativement dirigées dans un sens et dans l'autre. On demande: 1° l'intensité de la résultante, 2° la distance de son point d'application au point O.

(M. Moureau, élève au lycée Henri IV.)

Nota. — 1° M. Edouard Lucas va publier incessamment une première série de jeux scientifiques pour servir à l'histoire, à l'enseignement et à la pratique des arts du calcul et du dessin. — Demander le prospectus par une carte postale adressée à l'auteur, 1, rue Boutarel.

2° Le 18° Congrès de l'Association Française pour l'Avancement des Sciences se tiendra à Paris, à l'École des Ponts et Chaussées, du 8 au 14 août, sous la présidence de M. de Lacaze Duthiers, membre de l'Institut. Cette Session comprendra des séances de sections, des visites industrielles et des excursions dans les environs de Paris.

L'Association distribue chaque année des subventions pour des recherches ou expériences scientifiques. Une somme de 18,000 francs a été votée cette année par le Conseil et le total des subventions distribuées à ce jour, s'élève à la somme de 192,000 francs. Pour tous les renseignements, s'adresser au Secrétariat, 28, rue Serpente, à Paris.

Le Directeur Gérant,
G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 14404-6-9.

DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE
DU THÉORÈME DE PAGÈS (*)

Par M. **E. Pomey.**

Théorème. — *Dans une conique quelconque, la projection de la portion de normale comprise entre l'axe focal et le point d'incidence, sur le rayon vecteur du point d'incidence, est constante et égale au paramètre de la courbe.*

1° *Coniques à centre.* — Soient F et F′ les foyers, M un point de la courbe, I le point de rencontre de la normale en M avec FF′. Posons

$MF = \delta$, $MF' = \delta'$, $FF' = 2c$, $MI = N$, $IF = u$,
$IF' = u'$, $\delta' + \varepsilon\delta = 2a$, $a^2 - c^2 = \varepsilon b^2$,

ε désignant $+1$ ou -1, suivant que la courbe est une ellipse ou une hyperbole. Enfin, soit ω l'angle que fait la normale avec chacun des rayons vecteurs.

Des propriétés connues donnent :

$$(1) \qquad \frac{u}{\delta} = \frac{u'}{\delta'},$$

$$(2) \qquad \delta\delta' = uu' + \varepsilon N^2,$$

$$(3) \qquad 4c^2 = \delta^2 + \delta'^2 - 2\varepsilon\delta\delta' \cos 2\omega;$$

De (1), on déduit

$$\frac{u}{\delta} = \frac{u'}{\delta'} = \frac{\varepsilon u + u'}{\varepsilon\delta + \delta'} = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a},$$

et, par suite, $u = \dfrac{c\delta}{a}$, $u' = \dfrac{c\delta'}{a}$.

Portant ces valeurs dans (2), on obtient

$$(4) \qquad N^2 = \frac{b^2\delta\delta'}{a^2}.$$

(*) Voyez : Catalan, *Cours d'Analyse*, p. 484. On trouvera *(loc. cit.)* une démonstration très élégante du théorème de Pagès; mais elle exige la connaissance de l'équation polaire de l'ellipse. Il est vrai que cette équation peut être établie par des considérations élémentaires. G. L.

Ensuite, on tire de (3)

$$\cos^2 \omega = \frac{1 + \cos 2\omega}{2} = \frac{(\delta' + \varepsilon\delta)^2 - 4c^2}{4\varepsilon\delta\delta'} = \frac{a^2 - c^2}{\varepsilon\delta\delta'},$$

ou

$$(5) \qquad \cos^2 \omega = \frac{b^2}{\delta\delta'}.$$

Multipliant alors (4) et (5), membre à membre, on a

$$\mathrm{N}^2 \cos^2 \omega = \frac{b^4}{a^2},$$

d'où

$$(6) \qquad \mathrm{N} \cos \omega = \frac{b^2}{a} = p.$$

C. Q. F. D.

2° *Parabole.* — La propriété s'étend immédiatement au cas de la parabole, en supposant que a et b grandissent indéfiniment, $\frac{b^2}{a}$ ayant une limite déterminée, égale à p. Mais on peut aussi l'établir directement, par des procédés divers, que le lecteur imaginera sans peine.

Remarque. — On sait comment on établit géométriquement le théorème précédent, par des démonstrations très diverses; notamment, en s'appuyant sur ce que *le produit des distances des foyers à une tangente quelconque est constant*; ou encore, comme le fait M. Ch. Taylor (*) en prouvant d'abord que *la projection de la portion de normale comprise entre le pied* M *et le point de rencontre avec le petit axe* (**) *sur les rayons vecteurs correspondant à* M, *est constante et égale au demi-grand axe.* La démonstration précédente offre un intérêt particulier parce qu'elle est naturelle et qu'elle se fixera facilement, croyons-nous, dans l'esprit des élèves; or, ce point a son importance.

(*) *The ancient and modern Geometry of conics*, p. 109.

(**) Dans le cas de l'ellipse. Il faut prendre l'axe non transverse, dans le cas de l'hyperbole.

SUR LES ÉGALITÉS A DEUX DEGRÉS

Par M. **G. de Longchamps.**

1. Définitions préliminaires. — Le général Frolow a récemment présenté à l'Académie des Sciences (*) un mémoire sur ce qu'il a proposé d'appeler *les égalités à plusieurs degrés.*

Je rappellerai d'abord la définition qui sert de base au Mémoire cité et, pour me borner, j'envisagerai seulement, dans cette Note, *les égalités à deux degrés.*

Lorsque deux séries de nombres

$$a_1, a_2, \dots a_p,$$
$$\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_p,$$

satisfont simultanément aux deux égalités

$$a_1 + a_2 + \dots + a_p = \alpha_1 + \alpha_2 \dots + \alpha_p,$$
$$a_1^2 + a_2^2 \dots + a_p^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 \dots + \alpha_p^2,$$

qu'on peut écrire, plus simplement,

$$\Sigma a = \Sigma \alpha,$$
$$\Sigma a^2 = \Sigma \alpha^2,$$

nous dirons, avec le général Frolow, que ces nombres vérifient une égalité à deux degrés (**).

Si N est un nombre, et ν un chiffre dans le système de numération que nous adoptons, de base θ ; alors le symbole $N\nu$ représente, dans la convention ordinaire, le nombre obtenu en écrivant ν à la droite de N.

(*) *Comptes-rendus,* séance du 19 novembre 1888. Voyez aussi le *Bulletin de la Société mathématique de France*, 1889, p. 69.

(**) Pour démontrer, par un exemple évident, l'existence de ces égalités, il suffit de prendre la suite

$$ab, \quad bc, \quad ca;$$
$$ba, \quad cb, \quad ac.$$

a, b, c désignant des chiffres quelconques ($ab = 10a + b$;...).

De même,

$$abc, \quad bca, \quad cab;$$
$$acb, \quad bac, \quad cba;$$

etc...

D'après cela, on a

$$\mathrm{N}\nu = \mathrm{N} \times \theta + \nu.$$

Pour plus de simplicité dans la rédaction qui suit, nous supposerons $\theta = 10$ et nous aurons

(1) $$\mathrm{N}\nu = \mathrm{N} \times 10 + \nu.$$

Cette égalité prouve que l'on a

(2) $$(\mathrm{N}\nu)^2 = \mathrm{N}^2 \times 100 + 20\mathrm{N} \times \nu + \nu^2 \ (*),$$

identité évidente, que nous utiliserons dans les développements qui suivent.

Pour éviter certaines répétitions, il sera sous-entendu que les lettres

$$\alpha, \beta, \gamma \ldots$$
$$a, b, c \ldots,$$

représentent des *chiffres*.

2. Théorème. — *Si*

(3) $$\alpha, \beta, \gamma \ \ldots$$
$$\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \ \ldots$$

constituent une égalité à deux degrés; les nombres

(4) $$\alpha\beta, \beta\gamma, \gamma\alpha, \ \ldots$$
$$\mathrm{ab}, \mathrm{bc}, \mathrm{ca}. \ \ldots$$

jouissent de la même propriété.

Raisonnons sur trois chiffres.

1° Nous avons

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 11\,(\alpha + \beta + \gamma),$$
$$ab + bc + ca = 11\,(a + b + c).$$

Par conséquent, l'égalité

$$\alpha + \beta + \gamma = a + b + c,$$

entraîne la suivante

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = ab + bc + ca.$$

2° Il reste à vérifier que

$$(\alpha\beta)^2 + (\beta\gamma)^2 + (\gamma\alpha)^2 = (ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2.$$

Or,

$$(\alpha\beta)^2 = 100.\alpha^2 + \beta^2 + 20\alpha \times \beta;$$

et, par suite,

$$(\alpha\beta)^2 + (\beta\gamma)^2 + (\gamma\alpha)^2 = 101(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + 20(\alpha \times \beta + \beta \times \gamma + \gamma \times \alpha).$$

(*) Il convient de noter ici, avec soin, la différence qui existe entre les deux écritures : $\mathrm{N}\nu$ et $\mathrm{N} \times \nu$.

Mais

$$(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2(\alpha \times \beta + \beta \times \gamma + \gamma \times \alpha).$$

De ces deux égalités, on déduit

$$\text{(F)} \quad (\alpha\beta)^2 + (\beta\gamma)^2 + (\gamma\alpha)^2 = 91\,(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + 10(\alpha + \beta + \gamma)^2.$$

D'après cela, si les suites (3) forment une égalité à deux degrés, il en est de même des suites (4).

Exemple (*). — Les chiffres :

$$1, \quad 6, \quad 8,$$
$$2, \quad 4, \quad 9;$$

forment une égalité à deux degrés, puisque l'on a

$$1 + 6 + 8 = 15, \qquad 1^2 + 6^2 + 8^2 = 101,$$
$$2 + 4 + 9 = 15; \qquad 2^2 + 4^2 + 9^2 = 101.$$

Les nombres :

$$16, \quad 68, \quad 81;$$
$$24, \quad 49, \quad 92:$$

forment aussi une égalité à deux degrés On a, en effet,

$$16 + 68 + 81 = 165, \qquad \overline{16}^2 + \overline{68}^2 + \overline{81}^2 + 11\,441,$$
$$24 + 49 + 92 = 165; \qquad \overline{24}^2 + \overline{49}^2 + \overline{92}^2 = 11\,441.$$

(A suivre.)

LA DÉTERMINATION DES IMAGES DES OBJETS
DANS LES MILIEUX RÉFRINGENTS

Par **Svéchnicoff**, professeur au Gymnase de Froïtrx (Russie, gouvernement d'Orenbourg).

I

Supposons que l'œil A soit situé dans le miroir P et regarde le point lumineux S, dans le milieu Q. Désignons par n l'indice de réfraction du milieu P, par rapport au milieu Q. L'image du point lumineux se forme par l'intersection des rayons réfractés qui pénètrent dans l'œil *(fig. 1)*.

(*) Cet exemple est emprunté au Mémoire du général Frolow *(Bulletin de la Société mathématique*, 1889, p. 75).

Supposons que la pupille de l'œil ait la forme d'une fente infiniment étroite, perpendiculaire ou oblique au plan de la figure, et que A soit le milieu de la pupille.

Les rayons réfractés qui pénètrent dans l'œil sont situés dans les plans différents. Mais tous ces plans passent par la droite SO, perpendiculaire au plan qui limite les deux milieux transparents. On peut supposer que les prolongements des

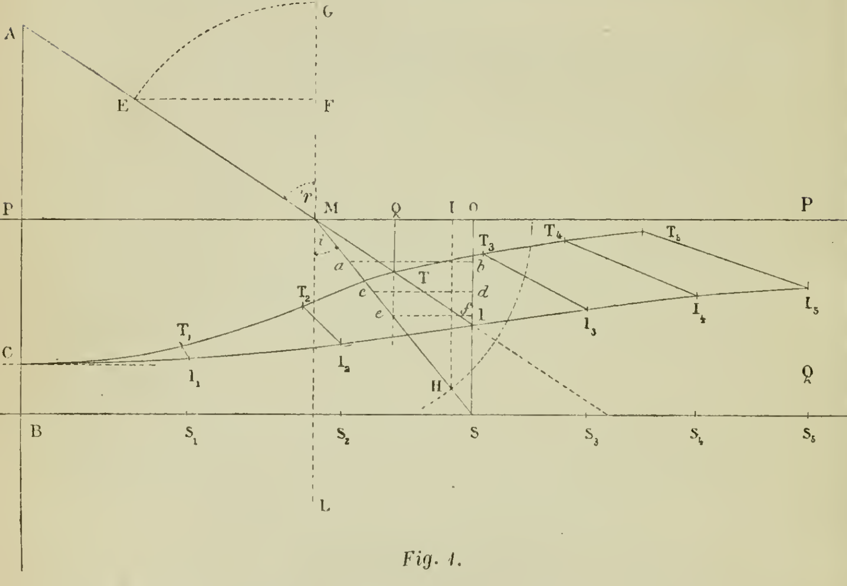


Fig. 1.

rayons qui pénètrent dans l'œil se coupent en un point T, situé sur la droite SO; car la longueur de la pupille est très petite, et ces rayons ne peuvent se couper en un autre point. Un examen attentif prouve, d'ailleurs, que l'image du point S n'est pas le point T, mais une tache très petite.

Il est facile de construire l'image d'un objet BD, pour l'œil A *(fig. 1)*. Par le point A, menons une droite quelconque AM, et considérons-la comme un rayon réfracté. Construisons le rayon incident MH, sachant que

$$\sin \widehat{HML} = n . \sin \widehat{AMG}.$$

Supposons que la droite MH et la ligne BD se coupent en

un point S. Il est évident que l'image du point S doit être située sur le prolongement de la droite AM. Du point S, abaissons la perpendiculaire SO sur la droite PM. Le point d'intersection des droites SO et AM est l'image du point S pour l'œil A. Par des constructions semblables, nous pouvons déterminer, sur BD, plusieurs points S_1, S_2, S_3,... et trouver leurs images T_1, T_2, T_3,... Joignons ces points par une courbe continue. Alors, nous aurons l'image de l'objet BD pour l'œil A.

Si le point lumineux S se meut sur la droite MSH, son image T décrit la droite AMT. C'est pourquoi l'on peut dire que la droite MT est l'image de la droite MS, pour l'œil A.

Étant données les positions de l'œil et de l'image d'un point, on peut déterminer la position du point lumineux.

Désignons par x, y, y', k les distances $\overline{PO}$, $\overline{SO}$, $\overline{TO}$, $\overline{AP}$, et par i et r les angles d'incidence et de réfraction SML, AMG.

D'après la loi de Descartes

$$\text{(A)} \qquad \sin i = n \sin r.$$

Les triangles semblables APM et TOM donnent

$$\overline{PM} : \overline{AP} = \overline{OM} : \overline{TO},$$

d'où $\overline{PM} : \overline{AP} = (\overline{PM}+\overline{OM}) : (\overline{AP}+\overline{TO}) = x : (k+y')$.

Le triangle rectangle APM donne

$$\operatorname{tg} r = \frac{\overline{PM}}{\overline{AP}}.$$

Par suite,

$$\text{(B)} \qquad \operatorname{tg} r = \frac{x}{k+y'} \cdots$$

Les triangles rectangles MOT et MOS donnent

$$\overline{MO} = \overline{OT}.\operatorname{tg} r, \qquad \overline{MO} = \overline{SO}.\operatorname{tg} i;$$

d'où

$$\text{(C)} \qquad y' \operatorname{tg} r = y \operatorname{tg} i. \; .$$

On tire, de l'équation (A),

$$\operatorname{tg} i = \frac{n \operatorname{tg} r}{\sqrt{1 + (1 - n^2)\operatorname{tg}^2 r}}.$$

C'est pourquoi l'équation (C) donne

$$ny = y'\sqrt{1 + (1 - n^2)\operatorname{tg}^2 r}.$$

Remplaçons tg r par $\frac{x}{x+y}$; nous avons

$$(1) \qquad y = \frac{y'}{n}\sqrt{1 + \frac{(1-n^2)x^2}{(k+y)^2}} \ldots$$

Le triangle MTS donne $\overline{\text{MT}} : \overline{\text{MS}} = \sin i : \sin r$.
d'où

$$(2) \qquad \overline{\text{MT}} = n.\overline{\text{MS}} \ldots$$

Prenons les droites PB, PO pour axes des coordonnées. Supposons que l'objet BS ait la forme d'une courbe dont l'équation soit $f(x.y) = 0$. Si nous remplaçons y par $\frac{y'}{n}\sqrt{1 + \frac{(1-n^2)x^2}{(k+y')^2}}$, dans cette équation, nous aurons celle de son image CT.

L'image de la droite BS, parallèle à PO, est une courbe qui a pour équation

$$x^2 = \frac{(k+y')^2(n^2b^2 - y'^2)}{(1-n^2)y'^2}.$$

Nous avons désigné par b la distance $\overline{\text{BP}}$.

Le rayon de courbure de cette courbe, au point C(o, nb), est

$$\frac{(nb+k)^2}{(1-n^2)nb}.$$

Si k est nul, nous aurons l'équation de l'ellipse.

Si l'objet est situé dans l'eau, $n = \frac{3}{4}$; et la formule (1) devient

$$(1\ bis) \qquad y = \frac{4y'}{3}\sqrt{1 + \frac{7x^2}{16(x+y')^2}} \ldots$$

La surface de rotation de la courbe CT, autour de l'axe CA, dans la *fig. 1*, est l'image du fond plan du bassin ayant la profondeur b, pour l'œil A.

Prenons la droite PB pour axe des z et deux droites quelconques perpendiculaires entre elles, sur la surface du liquide, pour axe des x et des y. Désignons par x, y, z les coordondonnées du point lumineux S, et par x', y', z' les coordonnées de son image T. Alors

$$x = x', \quad y = y', \quad z = \frac{z'}{n}\left(1 + \frac{(1-n^2)(x'^2 + y'^2)}{(x+z')^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

Si $\qquad k = \infty, \quad z = z' : n.$

Si $k = 0$, $z = \sqrt{z'^2 + (1 - n^2)(x'^2 + y'^2)} : n$.

Supposons que la pupille soit dans le plan de la *(fig. 2)*.

Prenons deux rayons incidents SM et SM', formant un angle très petit. Les rayons réfractés MN, M'N' se coupent en un point T qui n'est pas situé sur la droite SO.

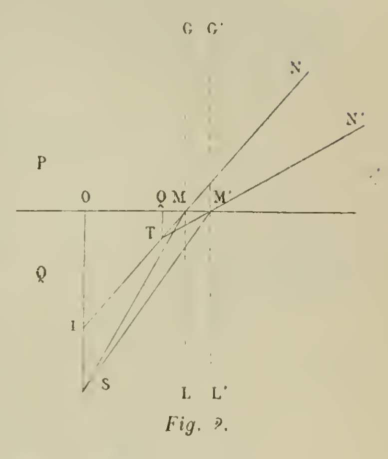


Fig. 2.

L'œil qui reçoit tous les rayons entre MN et M'N' voit le point S en T. Désignons par i, i' les angles d'incidence SML, S M'L'; et par r, r' les angles de réfraction NMG, N'M'G'. Alors $\widehat{M'SM} = i' - i, \widehat{M'TM} = r' - r$.

Les triangles rectangles OMS, OM'S donnent

$$\overline{OM'} = y \operatorname{tg} i', \quad \overline{OM} = y \operatorname{tg} i;$$

d'où

$$\overline{OM'} - \overline{OM} = \overline{MM'} = y(\operatorname{tg} i' - \operatorname{tg} i) = \frac{y \sin(i' - i)}{\cos i' \cos i}.$$

Le triangle MM'T donne

$$\overline{TM} : \overline{MM'} = \cos r' : \sin(r' - r).$$

Par conséquent,

$$\overline{TM} = \frac{y \cos r' \sin(i' - i)}{\cos i' \cos i \sin(r' - r)}.$$

Lorsque les différences $i' - i$ et $r' - r$ décroissent indéfiniment, leur rapport, et celui de leurs sinus, s'approchent indéfiniment d'une limite déterminée.

$$\lim \frac{\sin(i' - i)}{\sin(r' - r)} = \lim \frac{\sin \dfrac{i' - i}{2}}{\sin \dfrac{r' - r}{2}}.$$

Mais $\quad \sin i' = n \sin r', \quad \sin i = n \sin r,$

d'où $\quad \sin i' - \sin i = n(\sin r' - \sin r),$

$$2 \sin \frac{i' - i}{2} \cos \frac{i' + i}{2} = 2n \sin \frac{r' - r}{2} \cos \frac{r' - r}{2},$$

$$\sin \frac{i' - i}{2} : \sin \frac{r' - r}{2} = n \cos \frac{r' + r}{2} : \cos \frac{i' + i}{2}.$$

Par suite,

$$\lim. \frac{\sin (i' - i)}{\sin (r' - r)} = \frac{n \cos r}{\cos i},$$

$$\text{(D)} \qquad \lim. \overline{\text{TM}} = \frac{ny \cos^2 r}{\cos^3 i}.$$

Désignons par ξ et η les distances $\overline{\text{PQ}}$ et $\overline{\text{TQ}}$. Le triangle rectangle TQM donne

$$\text{TQ} = \text{TM} \cos r, \quad \text{QM} = \text{TM} \sin r \ (*).$$

$$\text{(E)} \qquad \overline{\text{TQ}} = \eta = \frac{ny \cos^3 r}{\cos^3 i},$$

$$\overline{\text{QM}} = \frac{ny \cos^2 r \sin r}{\cos^3 i},$$

$$\overline{\text{OM}} - \overline{\text{QM}} = \overline{\text{OQ}} = y \operatorname{tg} i - \frac{ny \cos^2 r \sin r}{\cos^3 i};$$

ou

$$\text{(F)} \qquad \overline{\text{OQ}} = \frac{(1 - n^2) y \operatorname{tg}^3 i}{n^2}.$$

Or, l'image du point S s'écarte de la perpendiculaire SO; et cet écartement est proportionnel au cube de la tangente de l'angle d'incidence. Il est facile de démontrer que

$$\text{(G)} \qquad \operatorname{tg} r = \frac{\xi}{k + \eta}, \overline{\text{OQ}} = (1 - n^2) \eta \operatorname{tg}^3 r,$$

$$\text{(3)} \quad y = \frac{\eta}{n} \left(1 + \frac{(1 - n^2)\xi^2}{(k + \eta)^2}\right)^{\frac{3}{2}}, \ x = \xi + \frac{(1 - n^2)\eta\xi^3}{(k + \eta)^3}.$$

La courbe G, sur la *figure 1*, est l'image de la droite BS, pour l'œil A, si la pupille est située dans le plan de la figure.

La pupille de l'œil humain est circulaire. C'est pourquoi l'œil A voit deux images T, I, du même point lumineux S. Il est évident que l'image T est plus claire que l'image I. L'image I rend l'image T moins distincte.

(*) Fig. 1 et 2.

II

Supposons qu'un point S soit vu à travers un milieu à faces parallèles. Soit n l'indice de réfraction du milieu P par rapport au milieu Q (*Fig. 3*). SM étant un rayon quelconque, désignons par i, r les angles d'incidence et de réfraction SML, FMN. Alors les angles de seconde incidence et de seconde réfraction, MNE et CNL, seront r et i. Le rayon émergent NL et la perpendiculaire OS se coupent en un point T. Désignons par y la distance $\overline{SO}$ et par q l'épaisseur $\overline{OO'}$ du milieu P, puis calculons la longueur de $TO = y'$, qui détermine la position de l'image du point S, pour l'œil A, placé sur la droite NL.

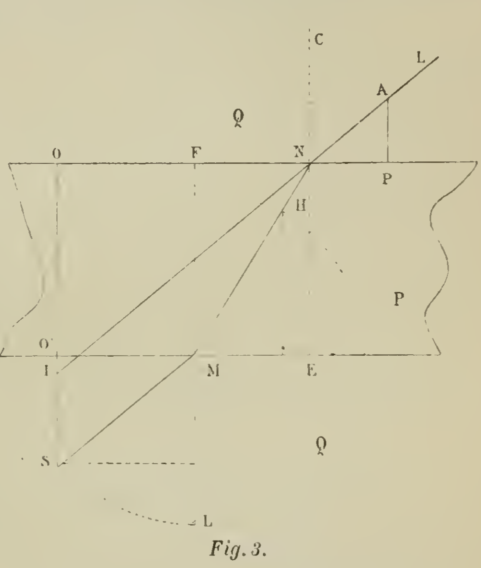


Fig. 3.

Le triangle rectangle TON donne $\operatorname{tg} i = \dfrac{\overline{ON}}{\overline{OF}}$.

Les triangles semblables TON et APN donnent

$$\overline{ON} : \overline{OT}$$

$$= \overline{NP} : \overline{AP} = (\overline{ON} + NP) : (\overline{OF} + \overline{AP}) = x : (x + y').$$

Par suite,

$$\text{(H)} \qquad \operatorname{tg} i = \frac{x}{x + y'}.$$

Les triangles NOT, NFM, MO'S donnent :

$$\text{(J)} \quad \overline{ON} = y' \operatorname{tg} i, \ \overline{FN} = q \operatorname{tg} r, \ \overline{O'M} = (y - q) \operatorname{tg} i;$$

d'où

$$(y' - y + q) \operatorname{tg} i = q \operatorname{tg} r.$$

On tire, de l'équation (A),

$$\operatorname{tg} r = \frac{\operatorname{tg} i}{\sqrt{n^2 + (n^2 - 1)\operatorname{tg}^2 i}}.$$

D'après cela, l'équation (J) donne

$$y' - y + q = \frac{q}{\sqrt{n^2 + (n^2 - 1)\operatorname{tg}^2 i}},$$

d'où

$$(4) \qquad y = y' + q - \frac{q}{\sqrt{n^2 + (n^2 - 1)\dfrac{x^2}{(x + y')^2}}}.$$

Pour le verre, $n = \frac{3}{2}$. La formule devient, alors,

$$(4\ bis) \qquad y = y' + q - \frac{2q}{\sqrt{9 + \dfrac{5x^2}{(x + y')^2}}}.$$

SUR LES CENTRES ISODYNAMIQUES

ET SUR LES CENTRES ISOGONES

Par M. **A. Boutin**, professeur au Collège de Courdemanche.

(*Suite*, voir p. 152.)

XI. — *Distance des points isodynamiques.*

Employons, pour déterminer cette distance, la formule:

$$\frac{1}{2}\delta^2\Sigma \sin^2 A = \Sigma(x - x_1)^2 + \Sigma \cos A\,(y - y_1)(z - z_1).$$

Il vient successivement, en introduisant les angles θ et φ:

$$x - x_1 = \frac{h \sin A \cos(A - 30^\circ)}{\Sigma \sin A \cos(A - 30^\circ)} - \frac{h \sin A \cos(A + 30^\circ)}{\Sigma \sin A \cos(A + 30^\circ)},$$

$$\Sigma \sin^2 A = \frac{2 \operatorname{tg}\varphi \operatorname{cotg}\theta}{\operatorname{tg}\varphi \operatorname{cotg}\theta - 1},$$

$$\Sigma \sin A \cos(A + 30^\circ) = \frac{\operatorname{tg}\varphi(\sqrt{3} - \operatorname{cotg}\theta)}{\operatorname{tg}\varphi \operatorname{cotg}\theta - 1},$$

$$\Sigma \sin A \cos (A - 30^\circ) = \frac{\operatorname{tg} \varphi (\sqrt{3} + \operatorname{cotg} \theta)}{\operatorname{tg} \varphi \operatorname{cotg} \theta - 1},$$

$$\sin A \sin B \sin C = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \varphi \operatorname{cotg} \theta - 1},$$

$$\Sigma \sin A \cos A = \frac{2 \operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \varphi \operatorname{cotg} \theta - 1},$$

$$\Sigma \cos^2 A = \frac{\operatorname{tg} \varphi \operatorname{cotg} \theta - 3}{\operatorname{tg} \varphi \operatorname{cotg} \theta - 1}.$$

D'après cela,

$$x - x_1 = \frac{2R\sqrt{3}}{3 - \operatorname{cotg}^2 \theta} (\sin A - \operatorname{cotg} \theta \cos A);$$

puis,

$$\frac{\delta^2 \operatorname{tg} \varphi \operatorname{cotg} \theta (\operatorname{cotg}^2 \theta - 3)^2}{12R^2(\operatorname{tg} \varphi \operatorname{cotg} \theta - 1)} = \Sigma(\sin A - \operatorname{cotg} \theta \cos A)^2$$

$$+ \Sigma \cos A (\sin B - \operatorname{cotg} \theta \cos B)(\sin C - \operatorname{cotg} \theta \cos C)$$

$$= \Sigma \sin^2 A + \operatorname{cotg}^2 \theta \, \Sigma \cos^2 A - 3 \operatorname{cotg} \theta \, \Sigma \sin A \cos A$$

$$+ \Sigma \cos A \sin B \sin C + 3 \operatorname{cotg}^2 \theta \cos A \cos B \cos C$$

$$= \frac{\operatorname{tg} \varphi \operatorname{cotg} \theta (\operatorname{cotg}^2 \theta - 3)}{\operatorname{tg} \varphi \operatorname{cotg} \theta - 1}.$$

Finalement,

$$\delta = VW = \frac{2R\sqrt{3}}{\sqrt{\operatorname{cotg}^2 \theta - 3}}$$

XII. — *Calcul des distances* VV_2, WW_2.

Employons la même formule; nous avons :

$$x - x_1 = \frac{h \cos (A - 30^\circ) \sin A}{\Sigma \sin A \cos (A - 30^\circ)}$$

$$- \frac{h \sin A \cos (B - 30^\circ) \cos (C - 30^\circ)}{\Sigma \sin A \cos (B - 30^\circ) \cos (C - 30^\circ)}.$$

Mais,

$$\Sigma \sin A \cos (B - 30^\circ) \cos (C - 30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Sigma \sin A \cos (A - 30^\circ)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\operatorname{tg} \varphi (\sqrt{3} + \operatorname{cotg} \theta)}{\operatorname{tg} \varphi \operatorname{cotg} \theta - 1}.$$

On a donc

$$x - x_1 = \frac{2R}{\sqrt{3}(\operatorname{cotg} \theta + \sqrt{3})} \left[\begin{array}{l} \sqrt{3} \cos (A - 30^\circ) - \\ 2 \cos (B - 30^\circ) \cos (C - 30^\circ) \end{array} \right],$$

et, par suite,

$$\frac{3\delta^2}{8R^2}(\cot\theta + \sqrt{3})^2\Sigma \sin^2 A = \Sigma(\cos A - 2\cos B\cos C)^2 +$$

$$+ \Sigma\cos A\,(\cos B - 2\cos A\cos C)(\cos C - 2\cos A\cos B)$$

$$= \Sigma\cos^2 A - 9\cos A\cos B\cos C + 4\cos A\cos B\cos C\,\Sigma\cos^2 A$$

$$= \frac{\operatorname{tg}\varphi\cot\theta\,(\operatorname{tg}\varphi\cot\theta - 9)}{(\operatorname{tg}\varphi\cot\theta - 1)^2};$$

ou, enfin,

$$\delta^2 = \overline{VV_2}^2 = \frac{2S}{3(\cot\theta + \sqrt{3})^2}(\cot\theta - 9\cot\varphi).$$

On trouverait, de même,

$$\overline{WW_2}^2 = \frac{2S}{3(\cot\theta - \sqrt{3})^2}(\cot\theta - 9\cot\varphi).$$

XIII. — *Distances des centres isogones* V_2 W_2.

Pour les points V_2, W_2, on a

$$x - x_1 = \frac{h\sin A\cos(B - 30^\circ)\cos(C - 30^\circ)}{\Sigma\sin A\cos(B - 30^\circ)\cos(C - 30^\circ)} - \frac{h\sin A\cos(B + 30^\circ)\cos(C + 30^\circ)}{\Sigma\sin A\cos(B + 30^\circ)\cos(C + 30^\circ)}$$

$$= \frac{R}{\sqrt{3}(\cot^2\theta - 3)}\left[\begin{array}{l}(\cot\theta - \sqrt{3})(\cos B\sqrt{3} + \sin B)(\cos C\sqrt{3} + \sin C) + \\ + (\cot\theta + \sqrt{3})(\cos B\sqrt{3} - \sin B)(\cos C\sqrt{3} - \sin B)\end{array}\right]$$

$$= \frac{2R}{\sqrt{3}(\cot^2\theta - 3)}(4\cot\theta\cos B\cos C + \cot\theta\cos A - 3\sin A).$$

Par suite, $$\frac{3\delta^2}{8R^2}(\cot^2\theta - 3)^2\Sigma\sin^2 A$$

$$= \Sigma(4\cot\theta\cos B\cos C + \cot\theta\cos A - 3\sin A^2)$$

$$+ \Sigma\cos A(4\cot\theta\cos A\cos C + \cot\theta\cos B - 3\sin B)$$

$$\times (4\cot\theta\cos A\cos B + \cot\theta\cos C - 3\sin C);$$

ou, finalement, $$\delta^2 = \frac{2S}{3}\cdot\frac{\cot\theta - 9\cot\varphi}{\cot^2\theta - 3}.$$

(A suivre.)

ESSAI
SUR LA
GÉOMÉTRIE DE LA RÈGLE ET DE L'ÉQUERRE
(SECONDE PARTIE)

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite*, voir p. 155.)

129. La hauteur de la montagne. — Soit S le sommet de la montagne. Deux mires verticales, de même hauteur, sont situées en AB, A'B'. L'observateur vient successivement se placer en O, puis en O', de façon que les lignes de visée OB, O'B' passent par le point S.

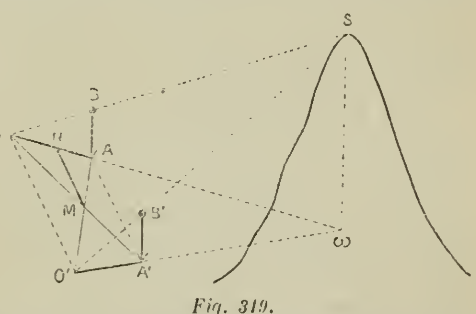


Fig. 319.

On observera d'abord que les droites OO', AA' sont parallèles. En effet, soit ω la projection de S sur le plan de l'horizon (*); on a

$$(1) \qquad \frac{S\omega}{AB} = \frac{O\omega}{OA}, \qquad \frac{S\omega}{A'B'} = \frac{O'\omega}{O'A'};$$

Comme on suppose AB = A'B', on a donc

$$\frac{O\omega}{OA} = \frac{O'\omega}{O'A'}.$$

Ainsi, les droites AA', OO' sont parallèles.

Plaçons en M un jalon, en ligne droite avec OA', d'une part, et avec O'A, d'autre part; puis, par M, traçons MN parallèle à

(*) Les points O, O' sont suffisamment rapprochés, dans les opérations de ce genre, pour qu'on puisse, sans erreur appréciable, les considérer comme situés dans un même plan horizontal.

OO'. La ponctuelle O, N, A, ω est harmonique, et l'on peut écrire

$$\frac{NO}{NA} = \frac{\omega O}{\omega A} = \frac{\omega O}{\omega O - OA},$$

d'où

$$\omega O = \frac{OA - NO}{NO - NA}.$$

D'après cela, l'égalité (1) devient

$$S\omega = AB - \frac{NO}{NO - NA}.$$

Cette égalité permet de calculer Sω, et l'on voit que tout le travail se trouve réduit à quelques jalonnements bien simples et à la mesure des segments NO, NA; la hauteur AB étant connue une fois pour toutes. Il faut noter avec soin que, dans la formule précédente, AB ne désigne pas la longueur totale de la mire: il faut, de celle-ci, retrancher la hauteur h de l'œil de l'observateur au-dessus de l'horizon. Au contraire, on doit ajouter h à la hauteur de la montagne; mais cette dernière correction est insignifiante.

Si les piquets employés AB, A'B' ne sont pas de même longueur, la construction précédente et la formule trouvée s'appliquent encore, avec la modification suivante.

Dans ce cas, AA', OO' ne sont plus parallèles et l'on doit remplacer MN par une droite allant de M au point de concours de AA' avec OO'. Il peut arriver, si les hauteurs AB, A'B' diffèrent peu, que ce point de concours soit trop éloigné pour pouvoir être déterminé: alors, on utilisera l'une des constructions que nous avons précédemment indiquées (*seconde partie*, § **35**) lorsque nous nous sommes occupé du problème des *percées concourantes*. (*A Suivre.*)

ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE

Épure du concours de 1889 pour l'admission à l'École spéciale militaire.

On donne un plan PαP', *dont les traces font avec la ligne de terre* xy *(*x *à gauche,* y *à droite) deux angles* Pαy *et* P'αy *égaux chacun à* 45°; *sur la trace horizontale un point* A *dont l'éloigne-*

ment est 40mm, *et sur la trace verticale un point* B *dont la cote est* 62mm. *La droite* AB *est le côté d'un carré situé dans le plan* PαP', *à droite de* AB; *ce carré est la base d'un cube situé au-dessus du plan.*

Construire l'intersection de ce cube avec le cylindre droit ayant pour trace verticale un cercle de 65mm *de rayon, situé au-dessus de la ligne de terre et tangent à cette ligne au point* a', *projection verticale du point* A.

On représentera la partie du solide cubique comprise dans le cylindre.

(Durée de la séance: 2 h. 1/2.)

Nous avons construit l'épure à l'échelle $\frac{3}{5}$.

On obtient aisément les traces du plan donné PαP', et le côté donné ab, $a'b'$ du cube.

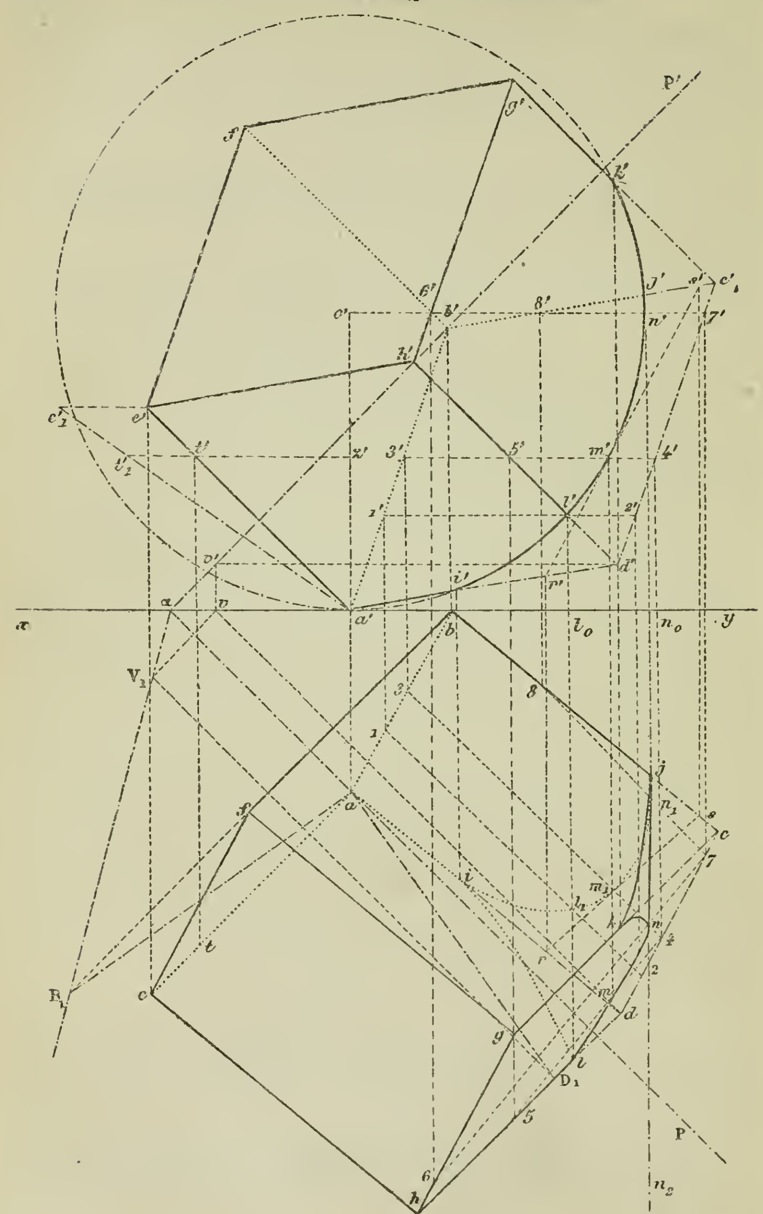
On rabat sur le plan horizontal, autour de αP, le plan PαP', et la droite ab, $a'b'$ de ce plan : on obtient les rabattements B_1 de B, αB_1 de αP', aB_1 de ab, $a'b'$. La perpendiculaire aD_1 menée en a à aB_1, égale à $a B_1$, est le rabattement d'un côté du cube adjacent au côté donné. On sait relever en d, d' le point rabattu en D_1. On achève facilement les parallélogrammes $badc$, $b'a'd'c'$, projections de la base inférieure du cube.

Des sommets de cette base on mène des perpendiculaires aux traces du plan; l'une d'elles, at, $a't'$ est amenée à être de front par rotation autour de la verticale a, $a'z'$; sa projection verticale nouvelle est $a't_1'$; on porte sur $a't_1'$, à partir de a', la longueur $a'e_1'$ égale à aB_1; la perpendiculaire $e_1'e'$ à $a'z'$ donne sur $a't'$ la projection verticale e' d'un sommet E de la base supérieure du cube; d'où l'on déduit e; d'ailleurs, $a'e$ égale ae. On construit ensuite les projections des autres sommets F, G, H du cube.

On marque sur $a'z'$ la projection verticale o' de l'axe du cylindre donné, et on décrit la circonférence o' trace et projection verticale de ce cylindre, ainsi que son contour apparent horizontal de droite, n_0n_2, seul utile.

A, est un point isolé de l'intersection du cube et du cylindre.

La circonférence o' coupe les projections verticales de quatre arêtes du cube, autres que les trois qui passent par a, a', en des


P'
x
y
V₁
R₁
D₁
P
l_o
n_o
n_2

points i', j', k', l' qui sont les projections verticales de points d'intersection du cylindre et d'arête du cube; on a, par suite, leurs projections horizontales i, j, k, l. De I en J, le cylindre coupe la face ABCD du cube selon un arc d'ellipse, qui se projette verticalement selon l'arc de cercle $i'j'$ et horizontalement selon un arc d'ellipse ij, dont on obtient un point quelconque au moyen d'un plan sécant horizontal auxiliaire; $1'.2'$ donne l'horizontale $1'.2'$, 1.2 de la face ABCD, la génératrice l', l_0l du cylindre : 1.2 et l_0l se coupent en un point l_1 de l'arc ij. On construit de même les arcs d'ellipse jk, kl, li, projections horizontales des intersections du cylindre et des faces BCGF, CGHD, HDAE. Un plan sécant horizontal auxiliaire donne, en général, deux points de la projection horizontale de l'intersection du cylindre et du cube; tel est le plan horizontal $3'.4'$ qui donne les points m et m_1. Il est nécessaire de trouver les projections horizontales n et n_1 des points où la génératrice n', n_0n_2 de contour apparent horizontal du cylindre coupe le cube; en n la courbe $knml$ est tangente à n_0n_2; en n_1 la courbe jn_1m_1i est tangente à n_0n_2.

La projection verticale de la tangente à l'intersection en un point quelconque m_1, m' est la tangente $r's'$ en m' au cercle o'; $r's'$ est la projection verticale d'une droite du plan ABCD; elle coupe en R et S deux droites de ce plan : donc la projection horizontale de la tangente en m_1, m', est rs.

La projection verticale du corps demandé est la partie de projection du cube limitée par l'arc $i'l'j'k'$; et par le contour polygonal $k'g'f'e'a'i'$. Sa projection horizontale est formée par les projections horizontales des arêtes du cube qui ne sontpas coupées, par les portions ai, bj, gk, kl de projections horizontales des quatre arêtes coupées, par la portion nn_1 du contour apparent horizontal du cylindre, et, enfin, par les quatre arcs utiles des ellipses, projections de l'intersection du cylindre et du cube; les arcs il et n_1m_1i sont cachés.

Ernest Lebon.

BIBLIOGRAPHIE

Sur une nouvelle méthode de résolution des équations linéaires, et sur l'application de cette méthode au calcul des déterninants; par B. I. Clasen, chanoine de la cathédrale de Luxembourg. (Brochure de 32 pages; à Paris, Gauthier-Villars et fils, 55, quai des Grands-Augustins.)

La méthode exposée dans la brochure en question présente une grande analogie avec celle qui est connue dans l'enseignement français sous le nom de *Méthode par réduction aux mêmes coefficients.*

Si nous prenons, pour fixer les idées, l'exemple classique de trois équations à trois inconnues

$$U = ax + by + cz - d = 0,$$
$$V = a'x + b'y + c'z - d' = 0,$$
$$W = a''x + b''y + c''z - d'' = 0;$$

au lieu de tirer x, y, des premières, pour porter ces valeurs dans la troisième (ce qui constitue la méthode par substitution), on combine, dans la méthode en question, les équations $U = 0$, $V = 0$, de façon que, dans les combinaisons obtenues, on ait les résultats suivants :

1° La lettre x fait partie de la première combinaison, mais elle n'entre pas dans la seconde; et *vice versâ*, pour y.

2° Dans les deux combinaisons, x, y ont (au signe près, dans certains cas) le même coefficient.

Ces combinaisons s'obtiennent immédiatement en observant que

$$b'U - bV = (ab' - ba')x + (cb' - bc')z - db' + bd' = 0,$$
$$aV - a'U = (ab' - ba')y + (ac' + ca')z - ad' + da' = 0.$$

En multipliant les égalités ainsi obtenues, respectivement, par $-a''$. $-b''$; et en ajoutant les résultats avec la troisième équation, on a la valeur de z.

Dans la méthode classique, à laquelle nous avons fait allusion plus haut, on opère différemment. On sait que pour, appliquer cette méthode, on réduit une inconnue, x par exemple, au même coefficient dans les trois équations. A cet effet, on multiplie les deux membres de celles-ci, respectivement, par $a'a''$, $a''a$, aa'; et en les soustrayant membre à membre deux à deux, on reste en présence de deux équations à deux inconnues sur lesquelles on opère de la même façon. Je ne sais pas si, dans la pratique (*), et malgré les perfectionnements de calcul que M. Clasen fait connaître, le procédé est plus simple que celui que je viens de rappeler; on voit, dans tous les cas, la différence essentielle qui existe entre les deux méthodes.

(*) Pour la théorie, il me paraît y avoir peu de différence entre les diverses méthodes. Dans les différents procédés de resolution des équations linéaires, il faut, en effet, établir que les systèmes considérés sont équivalents; or, il y a toujours quelques longueurs d'explications, si l'on n'emploie pas le signe symbolique et les propriétés des déterminants.

J'ai moins goûté les considérations qui terminent la brochure, et qui sont relatives aux déterminants. Cette théorie des déterminants est aujourd'hui arrivée, autant que me permet de le juger une longue expérience de l'enseignement, au maximum de la simplicité. Il ne me paraît pas facile de toucher maintenant, avec l'espoir de la perfectionner, à une chose aussi claire et qui, étant donnée l'exposition classique d'aujourd'hui, pénètre si rapidement dans l'esprit de ceux qui abordent cet instrument de calcul (**).

Trigonométrie rectiligne, suivie des principes de la nouvelle géométrie du triangle à l'usage des candidats aux baccalauréats ès sciences et aux écoles du gouvernement par G. Lalbalétrier. Prix 2 fr. 50; en vente chez Croville-Morant, rue de la Sorbonne.

Le livre de M. Lalbalétrier est divisée en deux parties. La première, est consacrée à la Trigonométrie rectiligne élémentaire. Le programme des matières demandées aux examens du Baccalauréat et à ceux des Ecoles du gouvernement y est développé avec beaucoup d'ordre et de clarté. L'auteur considère, avec raison, les formules

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$$
$$A + B + C = \pi.$$

comme fondamentales, dans la Trigonométrie plane. Il en fait usage, à l'exclusion des autres formules ordinairement employées, pour la résolution des triangles, dans les différents cas. Il y a, dans cette manière uniforme d'attaquer cette question, un avantage pédagogique. En effet, les candidats éprouvent souvent quelque embarras pour faire le choix des formules qui conviennent le mieux au cas qui leur est proposé; cet embarras leur est ainsi évité. Nous signalerons aussi le chapitre qui est consacré aux équations trigonométriques. Les équations de la forme

$$\cos^2 x + p \cos x + q = 0,$$
$$\cos^4 x + p \cos^2 x + q = 0,$$

que l'on rencontre dans la solution de nombreux problèmes traités par la voie trigonométrique, y sont discutées complètement. Enfin, dans le chapitre réservé aux applications, l'auteur a rajeuni le sujet en faisant quelques emprunts à la Géométrie de la Règle et de l'Equerre. Il eût pu nous semble-t-il, étendre un peu ces applications qui ont un attrait particulier, parce qu'elles donnent aux jeunes étudiants un premier exemple de l'utilité pratique des sciences mathématiques. Mais l'auteur me répondra sans doute. et je reconnais tout le poids de cette objection, que, s'il ne l'a pas fait, c'est que les programmes lui imposaient cette discrétion ?

Ce scrupule n'a pourtant pas empêché M. Lalbalétrier, et je ne saurais trop le louer de cet acte de courage, de consacrer la seconde partie de son ouvrage à la géométrie récente. Je sais que beaucoup de professeurs et d'élèves regrettent de n'être pas initiés à ce coin de la science géométrique, faute d'un livre leur expliquant nettement le sens exact des mots nouveaux qui y sont en usage et leur donnant la démonstration de ses propriétés fondamentales. Ceux-là trouveront la réponse à

(**) La brochure de M. Clasen a paru, comme supplément dans le numéro de juillet de *Mathésis*, avec une analyse de M. P. Mansion.

leurs désirs dans le livre que j'analyse ici et pour la composition duquel M. Lalbalétrier a puisé, en quelques endroits, après m'avoir demandé une autorisation que je lui ai donnée de bien grand cœur, dans le *Journal de mathématiques*.

A l'Étranger, toutes les publications mathématiques, et je n'en excepte pas les livres classiques, sont remplies de documents empruntés à la nouvelle Géométrie du triangle. M. Lalbalétrier est le premier auteur français qui ait osé la présenter dans un ouvrage classique. S'il redoute, à ce sujet, quelques responsabilités, qu'il se rassure. Son exemple sera suivi, j'en ai la conviction la plus formelle, à bref délai; et bientôt ce petit coin si intéressant de la géométrie sera, dans ce pays de France qu'on dit, à tort, je pense, rebelle aux innovations les plus justifiées, aussi cultivé, aussi connu, aussi estimé qu'ailleurs. G. L.

CONCOURS GÉNÉRAL
DE L'ENSEIGNEMENT SPÉCIAL 1889

Cinquième année.

— La droite Az est l'axe d'une parabole inconnue dont le sommet est A : deux points M et M′ de cette courbe se projettent sur Az aux points donnés N et N′; on a $AN = a$; $AN' = a'$.

1° Construire le point P où la corde MM′ rencontre Az; réciproquement, construire le sommet A connaissant N, N′ et P.

2° On considère en particulier la parabole de sommet A qui admet pour normale en M la corde inconnue MM′; on lui mène, par le point M, une autre normale; Soit R le point d'incidence; calculer la distance du sommet A à la projection S, de R, sur Az. Discuter.

3° Prouver que si MR et MR′ sont deux normales aux points R et R′ issues du point M de la courbe, le système pesant, formé par la parabole et par des poids égaux appliqués en M, R, R′, et supposé mobile autour de Az, droite horizontale et fixe, est en équilibre indifférent.

QUESTION 277

Solution par M. Emile Borel, élève au Lycée Louis-le-Grand (Sainte-Barbe) (*).

Soient Δ *et* Δ' *deux droites parallèles*, OO′ *une perpendiculaire commune. Par* O, *on trace une transversale qui rencontre* Δ' *en* A; *puis on prend : sur* OA, $AD = AC = AO'$; *sur* Δ', $AB = AO'$. *La droite* BC *rencontre* OO′ *en* P *et* Δ *en* Q. *De même*, BD *coupe* OO′ *en* P′ *et* Δ *en* Q′.

(*) Prix d'honneur de mathématiques spéciales au concours général de 1889.

Démontrer : 1° Que la circonférence PO′Q *est tangente à* Δ, *au point* Q, *et que la circonférence* P′O′Q′ *touche* Δ *en* Q′; *2° que les circonférences* PO′Q, P′O′Q′ *se touchent mutuellement en* O′.

(G. L.)

Traçons la circonférence qui a pour centre A et pour rayon AO′.

1° Il suffit de moutrer que $\overline{OQ}^2 = OO'.OP$.

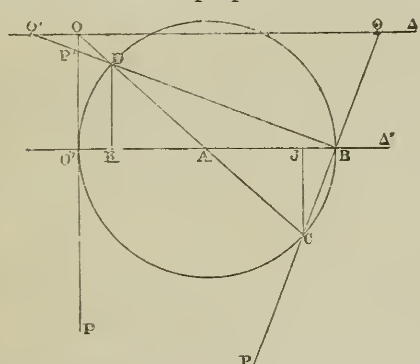
Or, OQ = OC, le triangle OCQ étant isoscèle, comme semblable au triangle isoscèle ABC. Il faut prouver que

$$\overline{OC}^2 = OO'.OP.$$

A cet effet, montrons que CO′ est antiparallèle à PC dans l'angle POC; ceci ressort évidemment de la mesure des angles.

On voit, de même, que $\overline{OQ'}^2 = \overline{OD}^2 = OO'.OP'$.

2° Les centres des circonférences considérées se trouvant à l'intersection des perpendiculaires élevées à Δ, en Q et Q′, et des perpendiculaires aux milieux de O′P et O′P′, pour reconnaître que la ligne des centres passe par O′, il suffit de prouver que



$$\frac{O'P}{O'P'} = \frac{OQ}{OQ'},$$

ou que

$$\frac{O'P}{O'P'} = \frac{OC}{OD}.$$

Abaissons, des points C et D, les perpendiculaires CI et DK, sur Δ′. Nous aurons

$$\frac{OC}{OD} = \frac{O'I}{O'K}.$$

D'autre part,

$$\frac{O'P}{O'P'} = \frac{\overline{BP}^2}{\overline{BP'}^2} = \frac{\overline{CO'}^2}{\overline{CB}^2} = \frac{IO'}{IB};$$

et comme O′K = IB, la propriété est démontrée.

Nota. — Solutions diverses par MM. Alexandre Couvert, élève au lycée Condorcet; E. Baudran, élève au lycée de Rouen, cours de Saint-Cyr; Le Goff, à Lesneven; J.-M. Galban, élève à l'École Polytechnique de Madrid;

QUESTIONS PROPOSÉES

334. — Un trièdre S,ABC est tel que le dièdre suivant SA soit droit ; de plus, on suppose que les faces BSA, ASC sont égales,

En posant $BSA = ASC = \alpha, \quad BSC = \beta,$
la formule fondamentale de la Trigonométrie sphérique appliqué à un triangle rectangle isocèle, prouve que l'on a

$$\cos \beta = \cos^2 \alpha.$$

On propose de reconnaître, élémentairement, cette relation et d'en déduire la démonstration du théorème suivant :

Si l'on coupe le trièdre considéré par un plan perpendiculaire à l'une des arêtes, le triangle obtenu est rectangle.

335. — Soit yOx un angle droit; sur Oy, on donne un point fixe A, par lequel on mène une transversale mobile rencontrant Ox en C; la bissectrice de OAC coupe Ox en, D.

1° Démontrer que la perpendiculaire élevée en D, à AD. rencontre AC en un point I, dont le lieu géométrique est une parabole, de foyer A.

2° La perpendiculaire menée, par A, à la transversale AC, coupe Ox en B; la bissectrice de l'angle ABC rencontre AC, en J ; le lieu de J est aussi une parabole de foyer A.

3° Les droites AD et BJ se coupent en un certain point K; le lieu de K est une droite. *(G. L.)*

Le Directeur Gérant,
G. de LONGCHAMPS

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 15816-7-9.

PROPRIÉTÉS DU TRIANGLE RECTANGLE

Par M. **L. Benezech.**

Je me propose d'établir, dans cette Note. deux propriétés caractéristiques du triangle rectangle. Elles ne sont pas sans doute d'une grande importance ; peut-être ont-elles l'avantage d'être nouvelles.

Théorème I. — *Dans tout triangle* ABC, *rectangle en* A, *on a :* $\overline{OI}^2 + \overline{OI}_a^2 = \overline{OI}_b^2 + \overline{OI}_c^2$; *et réciproquement.*

Théorème II. — *Dans tout triangle* ABC, *rectangle en* A, *on a :* $\omega I + \omega I_a + \omega I_b + \omega I_c$; *et réciproquement.*

ω, désigne le centre du cercle des neuf points; O, I, I_a, I_b, I_c représentent, respectivement, les centres des cercles : circonscrit, inscrit et ex-inscrit. Pour établir ces propriétés, nous nous appuierons sur la proposition suivante :

Lemme. — *Dans tout triangle* ABC. *rectangle en* A, $r_a = r + r_b + r_c$; *et réciproquement* (r, r_a, r_b, r_c désignant les rayons du cercle inscrit et des cercles ex-inscrits).

En effet, dans un triangle ABC, rectangle en A, les rayons r_a, r, r_b, r_c, exprimés en fonction des côtés, ont pour valeurs respectives : p, $p - a$, $p - c$, $p - b$.

D'après cela, l'égalité $r_a = r + r_b + r_c$ est manifeste.

Réciproquement. — Si OA′ est la perpendiculaire abaissée du centre du cercle circonscrit sur le côté BC, on a :

$$OA' = \frac{r + r_b + r_c - r_a}{4} \text{(*)}.$$

(*) Cette relation est la conséquence du théorème de Carnot (*la somme des distances du centre du cercle circonscrit aux côtés est égale au rayon du cercle circonscrit, augmenté du rayon du cercle inscrit*; Géométrie de position § 137) et du theorème de Bobilier *(le cercle circonscrit au triangle passe par les milieux des segments obtenus en joignant le centre du cercle inscrit à l'un quelconque des centres des cercles ex-inscrits).* (G. L.)

Si l'on suppose $r_a = r + r_b + r_c$, alors OA′ est nul; le triangle est donc rectangle en A.

Cette remarque étant faite, nous pouvons aborder la démonstration des théorèmes que nous avons en vue.

1° Dans un triangle quelconque, on a, par le théorème d'Euler,

$$\overline{OI}^2 = R^2 - 2Rr,$$
$$\overline{OI}_a^2 = R^2 + 2Rr_a,$$
$$\overline{OI}_b^2 = R^2 + 2Rr_b,$$
$$\overline{OI}_c^2 = R^2 + 2Rr_c.$$

On en déduit :

$$(1) \qquad \overline{OI}^2 + \overline{OI}_a^2 - \overline{OI}_b^2 + \overline{OI}_c^2 = 2R(r_a - r - r_b - r_c).$$

Mais, d'après le Lemme, le second membre de cette égalité est nul; la première partie du théorème est donc démontrée.

Réciproquement. Le premier membre de l'égalité (1) étant nul, $r_{b,} - r - r_b - r_c = 0$. Donc, d'après la réciproque du Lemme, le triangle est rectangle en A.

Remarque. — De la relation :

$$\overline{OI}^2 + \overline{OI}_a^2 - \overline{OI}_b^2 - \overline{OI}_c^2 = 0, \ (^*)$$

et de celle-ci :

$$\overline{OI}^2 + \overline{OI}_a^2 + \overline{OI}_b^2 + \overline{OI}_c^2 = 12R^2,$$

qui est applicable à un triangle quelconque, on déduit, dans le cas du triangle rectangle,

$$\overline{OI}^2 + \overline{OI}_a^2 = \overline{OI}_b^2 + \overline{OI}_c^2 = 6R^2.$$

2° Des formules connues (**)

$$\omega I = \frac{R}{2} - r,$$

$$\omega I_a = \frac{R}{2} + r_a,$$

(*) Voyez Catalan, *Théorèmes et problèmes de Géométrie élémentaire*, 6e édition, p. 146.

(**) Elles résultent immédiatement du théorème de Feuerbach. *la circonférence des neuf points est tangente au cercle inscrit et aux cercles exinscrits.*

(G. L.)

$$\omega I_b = \frac{R}{2} + r_b,$$
$$\omega I_c = \frac{R}{2} + r_c,$$

on déduit :

(1) $\omega I + \omega I_a - \omega I_b - \omega I_c = r_a - r - r_b - r_c.$

Or, d'après le Lemme, le second membre de (2) est nul ; l'égalité est donc vérifiée.

Réciproquement. Le premier membre de (2) étant nul,

$$r_a - r - r_b - r_c = 0,$$

par suite, d'après la réciproque du Lemme, le triangle est rectangle en A.

REMARQUE. — En combinant la relation

$$\omega I + \omega I_a - \omega I_b - \omega I_c = 0,$$

avec la suivante :

$$\omega I + \omega I_a + \omega I_b + \omega I_c = 6R,$$

qui est applicable à un triangle quelconque, on a :

$$\omega I + \omega I_a = \omega I_b + \omega I_c = 3R.$$

SUR LES ÉGALITÉS A DEUX DEGRÉS

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite et fin*, voir p. 171.)

---

3. Théorème. — *Si les deux suites*

$$\alpha\beta, \quad \beta\gamma, \quad \gamma\alpha;$$
$$ab, \quad bc, \quad ca;$$

forment une égalité à deux degrés, les suites

$$\beta\alpha, \quad \gamma\beta, \quad \alpha\gamma;$$
$$ba, \quad cb, \quad ac;$$

forment aussi une égalité à deux degrés.

1° On a

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 11(\alpha + \beta + \gamma);$$

et, de même,

$$\beta\alpha + \gamma\beta + \alpha\gamma = 11(\alpha + \beta + \gamma).$$

D'où, $$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \beta\alpha + \gamma\beta + \alpha\gamma.$$

De cette remarque, on conclut
$$\beta\alpha + \gamma\beta + \alpha\gamma = ba + cb + ac.$$

2° La formule (F), établie ci-dessus, prouve que l'on a
$$(\alpha\beta)^2 + (\beta\gamma)^2 + (\gamma\alpha)^2 = (\beta\alpha)^2 + (\gamma\beta)^2 + (\alpha\gamma)^2$$
donc, etc.

Exemple. — Nous avons trouvé que les suites
$$\begin{matrix} 16 & 68 & 81 \\ 24 & 49 & 92 \end{matrix}$$
constituent une égalité à deux degrés. D'après le théorème précédent, les suites
$$\begin{matrix} 61, & 86, & 18; \\ 42, & 94, & 29; \end{matrix}$$
jouissent de la même propriété.

On a bien, en effet,

$61 + 86 + 18 = 165,$	$61^2 + 86^2 + 18^2 = 11\,441,$
$42 + 94 + 29 = 165;$	$24^2 + 49^2 + 92^2 = 11\,441;$

4. Théorème. — *Soient :*
$$\begin{matrix} \alpha, & \beta, & \gamma; \\ \mathrm{a}, & \mathrm{b}, & \mathrm{c}; \end{matrix}$$
des chiffres formant une égalité à deux degrés; les nombres
$$\begin{matrix} \alpha\mathrm{a}, & \beta\mathrm{b}, & \gamma\mathrm{c}; \\ \mathrm{a}\alpha, & \mathrm{b}\beta, & \mathrm{c}\gamma; \end{matrix}$$
forment aussi une égalité à deux degrés.

En effet, en posant
$$\alpha + \beta + \gamma = a + b + c = \mathrm{S},$$
$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = a^2 + b^2 + c^2 = \mathrm{T},$$
$$a \times \alpha + b \times \beta + c \times \gamma = \mathrm{P},$$
on a
$$\alpha a + \beta b + \gamma c = a\alpha + b\beta + c\gamma = 11\mathrm{S},$$
$$(\alpha a)^2 + (\beta b)^2 + (\gamma c)^2 = (a\alpha)^2 + (b\beta)^2 + (c\gamma)^2$$
$$= 101\mathrm{T} + 20\mathrm{P}.$$

Exemple. — Avec les chiffres déjà employés on obtient, par application du théorème précédent, les suites
$$\begin{matrix} 12, & 64, & 89; \\ 21, & 46, & 98; \end{matrix}$$

qui constituent une égalité à deux degrés. On peut vérifier, en effet, que

$$12 + 64 + 89 = 21 + 46 + 98 = 165,$$
$$12^2 + 64^2 + 89^2 = 21^2 + 46^2 + 98^2 = 12\,161.$$

5. — On généralisera, sans difficulté, les propriétés précédentes desquelles on peut déduire plusieurs corollaires. D'ailleurs, par application de la méthode indiquée, on établit facilement beaucoup d'autres propositions analogues. Voici, pour chaque exmple, la marche à suivre.

Appelons *caractéristiques* d'une suite donnée A, B, C,... les quantités ρ, σ :

$$\rho = A + B + C + \ldots$$
$$\sigma = A^2 + B^2 + C^2 + \ldots,$$

et posons $$\tau = \frac{1}{2}(\rho^2 - \sigma) = \Sigma AB.$$

A cette suite, on peut adjoindre, d'une infinité de façons, une autre suite

$$A', \quad B'. \quad C', \ldots$$

dont les différents termes sont des fonctions des quantités données A, B, C,...

En supposant que deux suites forment une égalité à deux degrés ; pour voir si les suites adjointes jouissent de la même propriété, on doit vérifier que leurs caractéristiques sont égales.

Ainsi, pour citer le cas le plus évident, les suites :

$$\left.\begin{matrix} \alpha, & \beta, & \gamma\,; \\ a, & b, & c\,; \end{matrix}\right\} \quad (\rho, \quad \sigma, \quad \tau)$$

étant à deux degrés ; les suites

$$\begin{matrix} \beta + \gamma, & \gamma + \alpha, & \alpha + \beta\,; \\ b + c, & c + a, & a + b\,; \end{matrix}$$

sont aussi à deux degrés; et leurs caractéristiques sont :

$$2\rho, \quad \text{et} \quad 2\sigma + 2\tau.$$

Exemple. — Les suites considérées ci-dessus, donnent

$$\begin{matrix} 14, & 9, & 7\,; \\ 13, & 11, & 6\,. \end{matrix}$$

De même, les suites

$$\alpha\beta\gamma, \quad \beta\gamma\alpha, \quad \gamma\alpha\beta;$$
$$abc, \quad bca, \quad cab;$$

donnent des égalités à deux degrés, dont les caractéristiques sont :

$$111\rho, \qquad 10101\sigma + 2220\tau;$$

etc....

SUR LES CENTRES ISODYNAMIQUES
ET SUR LES CENTRES ISOGONES

Par M. **A. Boutin**, professeur au Collège de Courdemanche.

(*Suite*, voir p. 180.)

XIV. — *Distance* $P_1 P_2$ *des centres des triangles équilatéraux podaires.*

Les coordonnées barycentriques de ces points étant :

(P_1) $\qquad 2 \sin A \sin B \sin C + \sqrt{3} \sin^2 A, \ldots$

(P_2) $\qquad 2 \sin A \sin B \sin C - \sqrt{3} \sin^2 A, \ldots;$

on a

$$x - x_1 = \frac{h \sin A(2 \sin B \sin C + \sqrt{3} \sin A)}{\Sigma(2 \sin A \sin B \sin C + \sqrt{3} \sin^2 A)}$$
$$- \frac{h \sin A(2 \sin B \sin C - \sqrt{3} \sin A)}{\Sigma(2 \sin A \sin B \sin C - \sqrt{3} \sin^2 A)}.$$

Mais :

$$\Sigma(2 \sin A \sin B \sin C + \sqrt{3} \sin^2 A) = \frac{2\sqrt{3} \operatorname{tg} \varphi (\sqrt{3} + \operatorname{cotg} \theta)}{\operatorname{tg} \varphi \operatorname{cotg} \theta - 1},$$

$$\Sigma(2 \sin A \sin B \sin C - \sqrt{3} \sin^2 A) = \frac{2\sqrt{3} \operatorname{tg} \varphi (\sqrt{3} - \operatorname{cotg} \theta)}{\operatorname{tg} \varphi \operatorname{cotg} \theta - 1},$$

$$h \sin A = \frac{2R \operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \varphi \operatorname{cotg} \theta - 1},$$

D'après cela,

$$x - x_1 = \frac{R}{\sqrt{3}(3 - \cot^2 \theta)} \begin{bmatrix} (2 \sin B \sin C + \sqrt{3} \sin A)(\sqrt{3} - \cot \theta) \\ -(2 \sin B \sin C - \sqrt{3} \sin A)(\sqrt{3} + \cot \theta) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{2R}{\sqrt{3}(3 - \cot^2 \theta)} (3 \sin A - 2 \cot \theta \sin B \sin C);$$

et, par suite,

$$\frac{3\delta^2}{8R^2} (\cot^2 \theta - 3)^2 \Sigma \sin^2 A$$

$$= \Sigma(3 \sin A - 2 \cot \theta \sin B \sin C)^2$$

$$+ \Sigma \cos A (3 \sin B - 2 \cot \theta \sin A \sin C)(3 \sin C - 2 \cot \theta \sin A \sin B)$$

$$= 9\Sigma \sin^2 A - 36 \sin A \sin B \sin C \cot \theta$$

$$+ 4 \cot^2 \theta \, \Sigma \sin^2 B \sin^2 C$$

$$+ \Sigma \cos A \left\{ \begin{matrix} 9 \sin B \sin C - 6 \cot \theta \sin A \sin^2 C \\ - 6 \cot \theta \sin A \sin^2 B + 4 \cot^2 \theta \sin^2 A \sin B \sin C \end{matrix} \right\}$$

$$= \frac{4 \operatorname{tg} \varphi \cot^3 \theta - 15 \operatorname{tg} \varphi \cot \theta + 27}{(\operatorname{tg} \varphi \cot \theta - 1)^2};$$

ou, enfin,

$$\delta^2 = \frac{2S}{\cot^2 \theta - 3} (4 \cot^3 \theta - 15 \cot \theta + 27 \cot \varphi).$$

XV. — *Le point de Lemoine partage VW, V_2W_2, P_1P_2 en segments proportionnels aux carrés des côtés des triangles équilatéraux podaires.*

VV_2, WW_2 étant parallèles, K partage les trois droites considérées dans le même rapport; $\frac{VV_2}{WW_2}$. La valeur de ce rapport d'après les résultats précédents, est

$$\frac{VV_2}{WW_2} = \frac{\cot \theta - \sqrt{3}}{\cot \theta + \sqrt{3}} = \frac{C_1^2}{C_2^2}.$$

XVI. — *La distance des centres isogones est moyenne proportionnelle entre la distance du premier isogone au premier isodynamique, et celle du second isogone au second isodynamique.*

Des résultats précédents, on déduit :

$$\frac{\overline{V_2W_2}^2}{\overline{WW_2}^2} = \frac{\cotg\theta - \sqrt{3}}{\cotg\theta + \sqrt{3}} = \frac{C_1^2}{C_2^2},$$

$$\frac{\overline{V_2W_2}^2}{\overline{VV_2}^2} = \frac{\cotg\theta + \sqrt{3}}{\cotg\theta - \sqrt{3}} = \frac{C_2^2}{C_1^2}.$$

On a donc $\dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{V_2W_2}{WW_2} = \dfrac{VV_2}{V_2W_2}$.

et, par conséquent,

$$\overline{V_2W_2}^2 = VV_2 . WW_2$$

XVII. — *Distances du point de Lemoine aux points précédents.*

En s'appuyant sur la proposition (XV) et sur les résultats déjà trouvés, il vient :

$$KV = R\sqrt{3}\ \text{tg}\,\theta \sqrt{\frac{\sin(30^\circ - \theta)}{\sin(30^\circ + \theta)}},$$

et

$$KW = R\sqrt{3}\ \text{tg}\,\theta \sqrt{\frac{\sin(30^\circ + \theta)}{\sin(30^\circ - \theta)}};$$

d'où

$$KV.KW = 3R^2\ \text{tg}^2\,\theta.$$

Puis

$$\overline{KV_2}^2 = \frac{1}{6} S\ \text{tg}^2\,\theta\,(\cotg\theta - 9\cotg\varphi)\cdot\frac{\sin(30^\circ - \theta)}{\sin(30^\circ + \theta)},$$

$$\overline{KW^2}^2 = \frac{1}{6} S\ \text{tg}^2\,\theta\,(\cotg\theta - 9\cotg\varphi)\cdot\frac{\sin(30^\circ + \theta)}{\sin(30^\circ - \theta)},$$

$$\overline{KP_1}^2 = \frac{S\ \text{tg}^2\,\theta}{6(\cotg\theta + \sqrt{3})^2}(4\cotg^3\theta - 15\cotg\theta + 27\cotg\varphi),$$

$$\overline{KP_2}^2 = \frac{S\ \text{tg}^2\,\theta}{6(\cotg\theta - \sqrt{3})^2}(4\cotg^3\theta - 15\cotg\theta + 27\cotg\varphi).$$

XVIII. — *Les cercles circonscrits aux triangles podaires équilatéraux interceptent sur les côtés de* ABC *des cordes proportionnelles à :* sin (B — C), sin (C — A), sin (A — B).

Ces cordes sont les projections, sur les côtés de ABC, de VV_2, plan horizontal 1'.2' donne le cercle du centre *o*, de rayon

WW_2 ; elles sont donc proportionnelles aux cosinus des angles de ces droites avec les côtés de ABC, ou aux cosinus des angles de la droite d'Euler avec les côtés. Ces cosinus sont eux-mêmes proportionnels aux cordes interceptées par le cercle des neuf points; c'est-à-dire proportionnels à sin (B − C), sin (C − A), sin (A − B).

On peut d'ailleurs le vérifier directement. Le cosinus de l'angle de BC et de la droite qui, en coordonnées normales, correspond à l'équation

$$\lambda x + \mu y + \nu z = 0,$$

est proportionnel à

$$\lambda - \mu \cos C - \nu \cos B.$$

On a donc, ici,

$$\cos (VV_2, BC) : \sin^2 (A + 60^\circ) \sin (B - C)$$
$$-\sin^2(B + 60^\circ) \sin(C - A) \cos C - \sin^2(C + 60^\circ) \sin(A - B) \cos B.$$
$$\cos (VV_2, BC) : \sin (B - C)$$

XIX. — *Coniques inscrites a* ABC, *et ayant pour foyers* V, V_2; W, W_2.

Les points V, V_2; W, W_2, étant inverses sont les foyers de coniques inscrites à ABC. Les équations de ces coniques sont :

$$\sqrt{x \cos (A - 30^\circ)} + \sqrt{y \cos (B - 30^\circ)} + \sqrt{z \cos (C - 30^\circ)} = 0,$$
$$\sqrt{x \cos (A + 30^\circ)} + \sqrt{y \cos (B + 30^\circ)} + \sqrt{z \cos (C - 30^\circ)} = 0.$$

La première est une ellipse nommée ellipse de Simmons; la seconde, est une hyperbole.

Le point de Gergonne, de ces coniques, est pour l'une V_2, pour l'autre W_2 ; il se confond avec un de leurs foyers. Il en résulte que les réciproques des centres isogones se trouvent, comme P_1, P_2, sur la droite H_0GK.

Ce fait résulte encore de ce que V_2 et W_2 sont des points de l'hyperbole de Kiepert, et que la transformée, par points réciproques, de cette courbe est la droite H_0GK.

(A suivre.)

ESSAI
SUR LA
GÉOMÉTRIE DE LA RÈGLE ET DE L'ÉQUERRE
(SECONDE PARTIE)

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite*, voir p. 183.)

130. Le problème du tunnel. — Le problème du tunnel peut se poser dans les termes suivants. Deux points donnés U, V, étant séparés par une chaîne de montagnes (*), on propose de déterminer : 1° aux points U, V, la direction de UV ; 2° la longueur de UV. En d'autres termes, on veut tracer, dans chacune des régions, la direction du tunnel qui doit traverser la montagne qui les sépare ; on veut aussi connaître la longueur de ce tunnel. Un problème de cette nature nous a précédemment occupé (*Seconde partie*, chap. III) ; mais les solutions que nous avons indiquées pour le problème de l'obstacle ne conviennent pas au cas présent. Voici comment on peut le traiter.

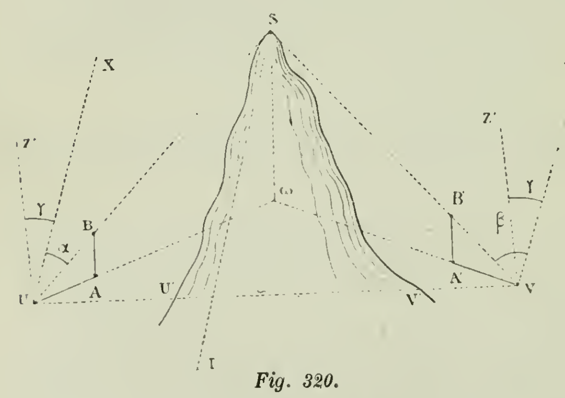


Fig. 320.

(*) Pour augmenter la difficulté du problème, on doit même supposer que ces montagnes sont inaccessibles, et que les points U, V, dont il est ici question, ne sont pas visibles, *à la fois*, pour un même observateur.

Les observateurs placés en U et V, tout en effectuant séparément leurs observations, conviennent de relever la hauteur apparente du sommet S et de l'étoile polaire; ils connaissent donc les angles SUX = α, SVY = β; ainsi que la hauteur zénithale ZUX = Z'VY = γ de l'étoile polaire. De plus, deux grandes mires verticales AB, A'B', permettent de jalonner les droites UA, VA', qui aboutissent au point invisible ω, projection du sommet S sur le plan de l'horizon; plan que nous supposons, d'ailleurs, commun aux deux observateurs U, V.

Imaginons, par le point S, une droite parallèle à la direction commune des droites UX, UY; soit I le point où elle rencontre l'horizon commun des points U, V. Considérons le trièdre S, UωI. Nous connaissons les trois faces de ce trièdre; savoir: ISω = γ, USI = α, USω = 90° − SUA. L'angle inconnu UωI est donc l'angle α, réduit à l'horizon. Les formules de la trigonométrie sphérique permettent de calculer UωI; nous supposerons, sans entrer autrement dans ce détail, ce calcul effectué. L'observateur, placé en V, calculera, de même, l'angle VωI; les deux résultats réunis feront connaître l'angle UωV. Quant aux longueurs Uω, Vω, elles sont faciles à calculer.

En effet, on connaît la hauteur de la montagne, et l'on a

$$U\omega = S\omega.\frac{UA}{AB}, \qquad V\omega = S\omega.\frac{VA'}{A'B'}.$$

En résumé, dans le triangle UωV, on connaît deux côtés et l'angle compris; on pourra donc déterminer les angles ωUV, ωVU; puis, la longueur du côté UV.

Bien entendu, pour la commodité des observations, on placera les postes d'observation U,V à une certaine distance du pied de la montagne. Après avoir calculé UV, pour obtenir la longueur du tunnel, on retranchera, de UV, les distances UU', VV', lesquelles sont mesurées directement.

La percée d'un tunnel, sous un fleuve, n'offre aucune difficulté, du moins au point de vue de la géométrie pratique. Dans ce cas, en effet, les extrémités U,V du tunnel sont des points visibles; la direction de UV est donc connue. Pourtant, si les points U, V se trouvaient séparés par un certain obstacle, on utiliserait quelques-unes des constructions que nous avons indiquées au chapitre III.

Enfin (*), si les points extrêmes du tunnel sont séparés par une distance telle que de l'un d'eux, on ne puisse apercevoir l'autre, ce cas soulève des difficultés particulières qu'on ne peut résoudre sans avoir recours à des procédés de triangulation géodésique qui n'appartiennent plus au domaine de la Géométrie de la règle et de l'équerre.

131. La hauteur du ballon. — Nous abordons maintenant la détermination de la hauteur d'un ballon au-dessus du plan de l'horizon correspondant à l'œil de l'observateur. On observera à ce propos que cette distance ne doit pas être confondue, en général, avec la hauteur du ballon au-dessus de la terre. Nous montrerons tout à l'heure, calculant de la hauteur des nuages, comment on détermine celle-ci.

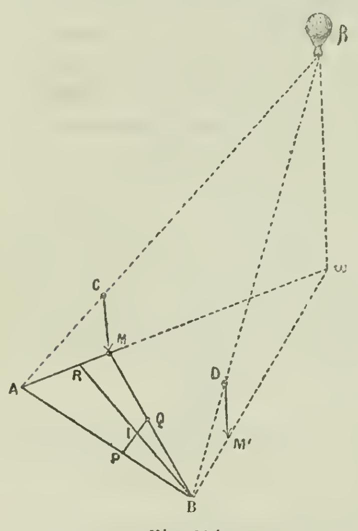


Fig. 321.

Deux observateurs placés en A, B, visent, au même instant, un ballon β ; Aβ passe par l'extrémité C d'une mire CM, dont la hauteur h est connue ; l'observateur placé en B détermine simplement la projection Bω sur le plan de l'horizon, de la ligne de visée BD. D'après ces observations, on demande la longueur de $\beta\omega = x$.

Traçons PQ, parallèle à Bω ; soit I le milieu de PQ. La droite BI rencontre AM en R ; la ponctuelle (A, R, M, ω) est, d'après cela, harmonique. On a donc

$$\frac{RA}{RM} = \frac{\omega A}{\omega M} = \frac{\omega A}{\omega A - AM},$$

ou

$$\frac{RM}{RA} = 1 - \frac{AM}{A\omega} = 1 - \frac{CM}{\beta\omega} = 1 - \frac{h}{x}.$$

(*) S'il s'agissait du tunnel sous la Manche, par exemple.

La hauteur inconnue x est donc donnée par la formule

$$(1) \qquad x = h \cdot \frac{RA}{RA - RM}.$$

132. Le problème du ballon captif. — De nombreux problèmes se rattachent à la considération du ballon, envisagé, suivant les cas, comme un point fixe ou mobile de l'espace. Il y a là, pour les problèmes qui touchent à l'art militaire, un élément nouveau, appelé peut-être à jouer un rôle important dans les guerres futures.

Imaginons que, dans une ville assiégée, on exécute, en ballon captif, des ascensions ayant pour but d'observer les positions de l'ennemi. Celui-ci aurait évidemment intérêt à déterminer le point invisible ω où est fixé le ballon observateur; ainsi que la distance $A\omega$ qui le sépare de ce point.

Les lignes AM, BM′, dont nous avons parlé au paragraphe précédent, vont se couper au point inconnu; mais il reste à calculer $A\omega$.

A cet effet, la ponctuelle (A, R, M, ω) étant harmonique, on a

$$\frac{1}{A\omega} = \frac{2}{AM} - \frac{1}{AR}.$$

Cette formule permet de calculer la distance demandée $A\omega$.

133. La vitesse du ballon. — On suppose qu'un ballon ait été observé dans deux positions β, β' : on a pu déterminer, pour ces deux positions, les hauteurs H, H′ du ballon au-dessus de l'horizon, ainsi que les distances $O\omega$, $O\omega'$ qui séparent l'œil de l'observateur des points ω, ω' projections des points β, β', sur le plan de l'horizon.

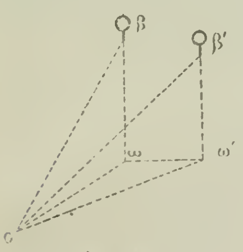


Fig. 322.

On a $\overline{\beta\beta'}^2 = (H - H')^2 + \overline{\omega\omega'}^2$.

D'autre part, dans le triangle $O\omega\omega'$, connaît les côtés $O\omega$, $O\omega'$, ainsi que l'angle $\omega O\omega'$; par suite, on pourra déterminer $\omega\omega'$. La formule précédente permettra donc de calculer $\beta\beta'$. En divisant le nombre obtenu, par le temps θ qui marque l'intervalle des deux observations, on obtiendra la vitesse cherchée.

Cette solution présente certainement des difficultés pratiques. D'ailleurs, on peut observer que le problème en question ne présente d'intérêt véritable que pour les ballons dirigeables; notamment, si l'on veut comparer les vitesses qui correspondent, avec un ballon donné, aux diverses machines qu'il est possible de lui adapter. Dans ce cas, on peut obtenir, pour le ballon considéré, une hauteur constante au-dessus de l'horizon ainsi qu'une trajectoire sensiblement rectiligne, entre deux verticales aboutissant à deux postes déterminés. L'estimation de la vitesse se fait alors directement, en divisant la distance qui sépare les deux points d'observation, par le temps de la durée de l'expérience. Mais, quoi qu'il en soit, ce que nous avons dit plus haut permet de résoudre le problème de la vitesse du ballon, dans le cas le plus général.

(A suivre.)

EXERCICES DIVERS

Par M. **A. Boutin**, professeur au collège de Courdemanche.

(Suite, voir p. 159.)

---

125. — A_1, B_1, C_1, *étant les sommets du triangle qui a pour côtés les tangentes en* A, B, C, *au cercle circonscrit,* θ *étant l'angle de Brocard de* ABC, *et* φ *l'angle donné par la relation*

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C,$$

on a :

$$p_1 = R \operatorname{tg}\varphi,$$
$$S_1 = R^2 \operatorname{tg}\varphi,$$
$$\operatorname{cotg}\theta_1 = \frac{1}{2}(\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{cotg}\theta),$$
$$\Sigma a_1^2 = 2R^2(\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{cotg}\theta),$$
$$R_1 = \frac{R}{4}(\operatorname{tg}\varphi \operatorname{cotg}\theta - 1).$$
$$r_1' + r_1'' + r_1''' = R \operatorname{tg}\varphi \operatorname{cotg}\theta.$$

Enfin, A_1, B_1, C_1, *peuvent être considérés comme les centres de trois cercles, tangents entre eux en* A, B, C. *Soient* R_a, R_b, R_c *les*

rayons de ces cercles, on a

$$\frac{1}{R_aR_b} + \frac{1}{R_aR_c} + \frac{1}{R_bR_c} = \frac{1}{R^2}$$

126. — *Si $\theta = 30°$, le triangle correspondant est équilatéral.*

Si x, y, z sont les cotangentes des angles d'un triangle, on a:

$$x + y + z = \sqrt{3},$$
$$xy + xz + yz = 1,$$

Si x est donné, y et z sont racines de

$$X^2 - (\sqrt{3} - x)X + 1 - x(\sqrt{3} - x) = 0.$$

La condition de réalité n'est remplie que pour

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

d'où
$$A = B = C = 60°.$$

(A suivre.)

ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE

Épure du Concours de 1887 pour l'admission à l'École spéciale militaire.

Un tétraèdre est placé sur le plan horizontal. Un des côtés de la base ab *(*a *est à gauche) est parallèle à la ligne de terre et distant de cette ligne de* 35^{mm} *: sa longueur est de* 100^{mm}*; les deux autres côtés ont pour longueurs* ac $= 123^{mm}$, bc $= 110^{mm}$. *L'arête* Sa $= 130^{mm}$, *l'arête* Sc $= 125^{mm}$*; l'angle dièdre formé par les deux faces* abc *et* Sac *est de* $70°$. *Construire ce tétraèdre.*

A partir du sommet S, *on prend sur* Sa *une longueur* SO *égale à* 50^{mm}, *et du point* O *comme centre, on décrit une sphère passant par le sommet* S.

Trouver l'intersection de cette sphère avec le tétraèdre.

Dans la mise à l'encre, on supposera enlevée toute la portion du tétraèdre détachée par la sphère.

(Durée de la séance : 2 h. 1/2.)

Nous avons dessiné l'épure à l'échelle $\frac{3}{5}$.

Après avoir dessiné le triangle *abc*, on rabat, sur le plan

horizontal, la face donnée Sac en S_1ac, autour de ac: puis, le triangle rectangle Ssd en $s_1'ds$ autour de la perpendiculaire S_1d à ac : comme l'angle en d de ce triangle égale 70° et que son hypoténuse égale S_1d, on le construit aisément, et on a ainsi la hauteur $s_1's$ de la pyramide, et la projection horizontale s de son sommet. Alors on achève la projection horizontale de la pyramide et on dessine sa projection verticale.

En prenant sur S_1a la longueur S_1O_1 égale au rayon donné de la sphère, on a le rabattement O_1 de son centre O, puis les projections o et o' de ce centre, et on trace ses contours apparents.

S est un point isolé de l'intersection de la sphère et du tétraèdre.

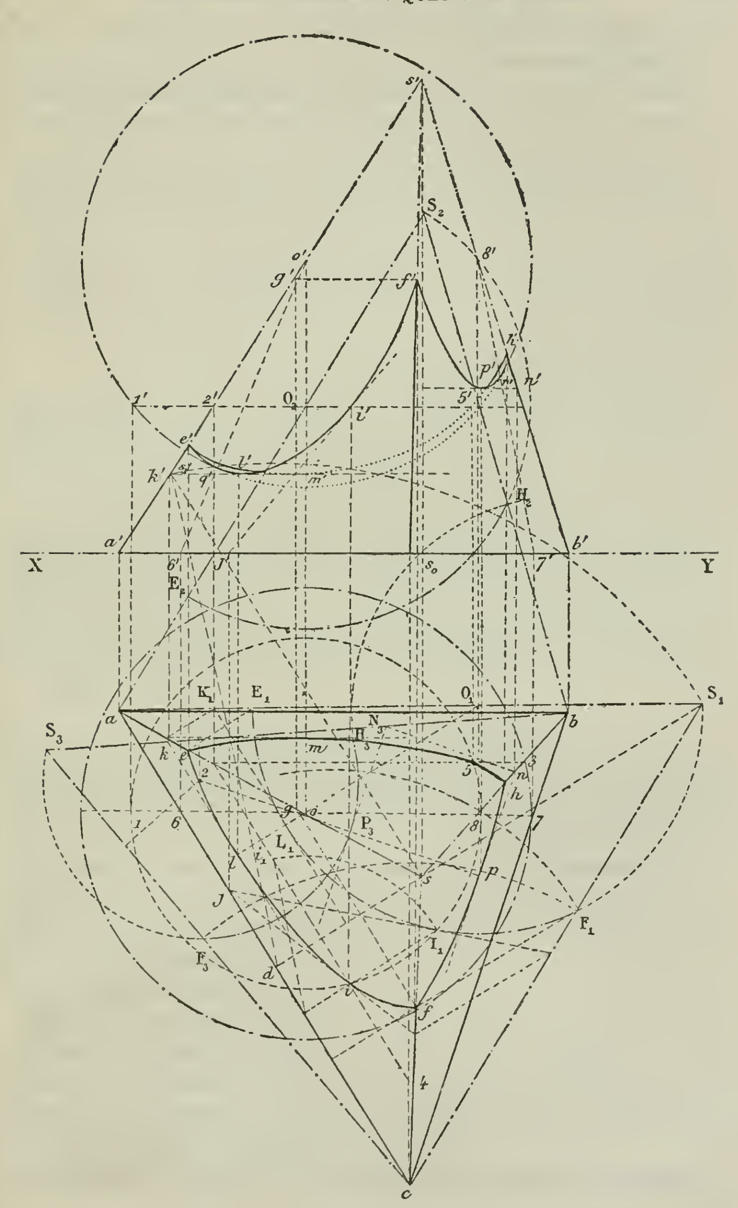
La face Sac coupe la sphère selon un grand cercle; le rabattement de l'arc utile de ce grand cercle est E_1F_1; donc les seconds points d'intersection de la sphère et des arêtes Sa et Sc sont e, e' et f, f'. On obtient d'une manière précise le point f', en construisant sur la face Sac l'horizontale qui contient le point F.

La face Sab est rabattue, sur le plan horizontal, en aS_2b, autour de ab; le centre O est rabattu en O_2; l'arc utile du grand cercle d'intersection de la face Sab et de la sphère est rabattu en E_2H_2; donc le second point d'intersection de la sphère et de l'arête Sb est h, h'.

La face Sbc est rabattue, sur le plan horizontal, en S_3bc, autour de bc; on marque sur S_3b et sur S_3c les rabattements H_3 et F_3 des seconds points d'intersection de la sphère et des arêtes Sb et Sc. On décrit le rabattement H_3F_3 de l'arc utile du cercle SFH d'intersection de la sphère et de la face Sbc.

On trouve, par relèvement, des points des arcs des ellipses projections des arcs utiles des cercles d'intersection de la sphère et des trois faces latérales de la pyramide; par exemple, le point I, rabattu en I_1, et situé sur l'arc E_1F_1, a pour projections i et i'. La tangente au cercle en I a pour rabattement I_1j; les tangentes en i et en i' aux ellipses projections de ce cercle sont ij, $i'j'$. On construira de même les projections des tangentes à l'intersection aux points E, F, H.

On peut aussi obtenir les projections de points de l'intersection de la sphère et des faces de la pyramide en employant des plans sécants auxiliaires horizontaux ou de front; en général, un tel plan donne deux points de l'intersection. Ainsi, le


s'
S₂
o'
g'
f'
8'
h'
p'
n'
1'
2'
O₂
5'
i'
e'
l'
k'
q'
m'
H₂
a'
b'
X
Y
6'
J'
s₀
7'
E₂
K₁
E₁
O₁
S₁
a
b
S₃
N₃
H₃
m
k
e
2
5
3
n
h
g
o
P₃
8
7
1
6
L₁
i₁
l
s
p
J
F₁
I₁
F₃
d
i
f
4
c

o 1, les parallèles 2.3, 2.4 à *ac* et à *ab* et les points *i*, *i'* et 5, 5' de l'intersection.

Chacun des trois arcs de cercle a une tangente horizontale ; la construction des projections de chacune de ces tangentes et de son point de contact est la même.

Ainsi, la tangente à l'arc E F est rabattue selon la tangente K_1L_1 en L_1 à l'arc E_1F_1, la droite K_1L_1 étant parallèle à *ac;* de K_1 sur S_1a on déduit *k* sur *sa*, et par suite *k'* sur *s'a'* ; par *k*, on mène la parallèle *kl* à *ab*, par *k'* la parallèle *k'l'* à XY; oL_1 coupe *kl* en *l*, d'où on a *l'*. Les projections de la tangente cherchée sont *kl* et *k'l'*; son point de contact est *l*, *l'*.

On obtient de même les points *m*, *m'* et *p*, *p'*.

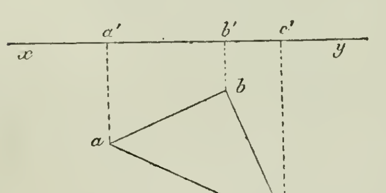
Le plan de front de trace horizontale *o*.1 qui passe par le centre de la sphère donne les points de l'intersection situés sur le contour apparent vertical de la sphère; la droite *o'*.6' donne *q'* et la droite 7'.8' donne *r'*.

Les projections hoizontales des lignes qui limitent le corps demandé sont toutes vues. Sur la projection verticale du corps, sont seuls cachés l'arc *q'r'* de contour apparent de la partie sphérique du corps, et la portion de l'arc *e'm'h'* comprise entre les points d'intersection de cet arc et des arcs *e'l'f'* et *f'p'h'*.

ERNEST LEBON.

NOTA. — Cette composition fut annulée, quelques jours après avoir été faite, parce que, par suite d'une erreur, le sujet de l'épure avait été, le matin du jour de cette composition, mis, pendant quelques minutes, entre les mains d'un petit nombre de candidats. Elle fut remplacée par celle dont l'énoncé suit :

Un tétraèdre SABC *a sa base* ABC *sur le plan horizontal :* aa' = 84mm, a'b' = 99mm, ab = 112mm, bc = 144mm, ac = 171mm. *L'arête* SA, *parallèle au plan vertical, égale* 136mm, *et fait avec l'arête* AB *un angle de* 62°.



On demande : 1° de construire le tétraèdre; 2° de mener la droite DE *perpendiculaire commune aux deux arêtes opposées* SA *et* BC.

Du point O, *milieu de* DE, *comme centre, on décrit une sphère*

avec un rayon égal à 22mm; *mener à cette sphère deux plans tangents perpendiculaires à l'arête* SC, *et construire les sections de ces deux plans avec le tétraèdre.*

Dans la mise à l'encre, on ne conservera que la partie du tétraèdre comprise entre les deux plans.

CORRESPONDANCE

Extrait d'une lettre de M. A. Boutin.

... A propos d'une Note parue dans le numéro de juillet *sur la distance de deux points*, voici une formule aussi simple que celle qu'indique M. Plamenevski *(loc. cit.)*.

En coordonnées normales, on a

$$2\delta^2 \sin A \sin B \sin C = \Sigma\,(x - x_1)^2 \sin 2A.$$

Cette formule est donnée, sans démonstration, par M. Lucas (*Mathesis*, 1889, p. 134). Il en déduit, pour la même distance, en coordonnées tripolaires, (X désignant le carré de la distance d'un point au sommet A)...

$$16\,S^2\delta^2 = \Sigma a^2\,(X - X_1)^2 + \Sigma\,2bc \cos A\,(Y - Y_1)(Z - Z_1).$$

Extraits d'une lettre de M. Neuberg.

... **1.** *Sur le théorème de Pagès* (J. M. E, p. 169). — Soient B, C les foyers d'une ellipse E passant par A ; I, I′ le centre du cercle inscrit au triangle ABC et celui du cercle ex-inscrit opposé à A; N, P les points de rencontre de la bissectrice AI avec le côté BC et avec la circonférence ABC. AN et AP sont les segments de la normale à E en A, compris entre la conique E et les axes principaux.

Cela posé,

$$AP = \frac{1}{2}\,(AI + AI'), \quad \frac{1}{AN} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{AI} = \frac{1}{AI'}\right);$$

car P est le milieu de II′, et les points A, N, I, I′ forment une division harmonique, puisque AI et AI′ sont les bissectrices de l'angle B du triangle ABN.

Projetant les points I, N, P, I′ en i, n, p, i' sur AB, on déduit

des égalités précédentes,

$$Ap = \frac{1}{2}(Ai + Ai'),\ \frac{1}{An} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{Ai} + \frac{1}{Ai'}\right),$$

ou

$$Ap = \frac{1}{2}(p - a + p) = \frac{1}{2}(b + c) = A$$

$$\frac{1}{An} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p - a} + \frac{1}{p}\right) = \frac{b + c}{(b + c)^2 - a^2} = \frac{A}{B^2};$$

a, b, c, p ont leur signification habituelle dans le triangle ABC; 2A, 2B désignent les axes de E,

Si p' est la projection de p sur AC, on a $Ap = Ap'$, et $Bp = Bp'$; d'ou

$$2Ap = Ap + Ap' = AB + AC = 2A.$$

Ces démonstrations sont, probablement, déjà connues.

2. *Sur les centres isodynamiques (J. M. E.*, p. 180). — Voici quelques renseignements bibliographiques qui ne peuvent qu'ajouter à l'intérêt de l'article de M. Boutin.

Dans les *Annales de Gergonne*, t. X, p. 202, Veeten, ancien professeur au lycée de Nîmes, a démontré que les trois cercles d'Apollonius d'un triangle ABC se coupent aux deux mêmes points V, W, sans préciser la position de la droite VW.

Le même théorème a été démontré par M. Kiehl dans une étude sur le point de Lemoine (*) (*Programme de Bromberg*, 1881). Ce géomètre fait voir que les points V, W sont situés sur la droite OK, perpendiculaire à l'axe d'homologie du triangle ABC et du triangle pédal de K *(droite de Lemoine)*, et que les distances de V ou de W aux points A, B, C sont proportionnelles aux hauteurs du triangle ABC.

Dans le *Mémoire sur le tétraèdre*, j'ai montré que, dans une transformation par rayons vecteurs réciproques ayant pour pôle V ou W, les homologues des points A, B, C sont les sommets d'un triangle équilatéral; j'ai mis en rapport les centres isodynamiques avec les centres isogones V_2, W_2 et signalé quelques propriétés des coniques inscrites au triangle ABC et ayant pour foyers V et V_2 ou W et W_2. Ces coniques ont été étudiées avec plus de détails par M. Simmons.

(*) Ce point est ordinairement désigné par la lettre K. La lettre O, employée plus loin, représente le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

Voici quelques-unes des formules que j'ai indiquées *(loc. cit)* (*).

$$\frac{VA}{WA} = \frac{VB}{WB} = \frac{VC}{WC} = \frac{\Delta_2}{\Delta_1} = \sqrt{\frac{\cot\theta - \sqrt{3}}{\cot\theta + \sqrt{3}}}.$$

$$a.VA = b.VB = c.VC = \frac{abc}{\sqrt{2S(\cot\theta + \sqrt{3})}},$$

$$a.WA = b.WB = c.WC = \frac{abc}{\sqrt{2S(\cot\theta - \sqrt{3})}},$$

$$OV = R\sqrt{\frac{\cot\theta - \sqrt{3}}{\cot\theta + \sqrt{3}}}, \quad OW = R\sqrt{\frac{\cot\theta + \sqrt{3}}{\cot\theta - \sqrt{3}}}.$$

MM. Cesàro (*Remarques sur la géométrie du triangle*, N. A. M., 1887, pp. 215-242) et M. Cay (*sur l'hyperbole de Kiepert*, Mathesis, t. VII, p. 208) ont signalé des relations assez curieuses entre l'hyperbole de Kiepert et les points V, W, V_2, W_2 (**). Les centre isogones sont les extrémités du diamètre de cette conique passant par K et le milieu de GH; les tangentes en G et H se coupant en K, on voit que les tangentes V_2 et W_2 sont parallèles à GH. Ces droites passant respectivement par V et W, les milieux P_1, P_2 de VV_2, WW_2 sont en ligne droite avec K.

La propriété que P_1 est le centre du triangle podaire de V résulte, sans calcul, de ce que les triangles podaires des points inverses V, V_2 sont inscrits à une même circonférence ayant pour centre le milieu de VV_2.

3. — *Sur le triangle podaire du centre de gravité* G *d'un triangle* ABC (Exercices 92 et 119 de M. Boutin, *J. M. E.*, pp. 92 à et 119.) — Soit A'B'C' ce triangle. Les deux quadrangles ABCK, A'B'C'G ont leurs côtés perpendiculaires. Le dernier est donc semblable au quadrangle A''B''C''K, A''B''C'' désignant le triangle podaire de ABC par rapport au point K. Donc, d'après une remarque due à M. Hadamard (*J. M. S.* 1885, p. 41), G est un foyer de l'ellipse qui touche les côtés du triangle A'B'C' en leurs milieux. La relation entre les angles

(*) Je conserve les notations de M. Boutin.
(**) Voyez, à ce propos, le nouvel article de M. Boutin; § 19, p. 201.

θ, θ' peut s'écrire sous l'une ou l'autre des formes :

$$(1) \qquad \cot^2\theta - 2 \cot \theta' \cot \theta + 3 = 0,$$

$$(2) \qquad \sin (2\theta + \theta') = 2 \sin \theta'.$$

Je propose pour θ', qui est l'angle de Brocard du faisceau des symédianes de ABC, la dénomination de *angle de Lemoine* de ABC.

A chaque valeur de θ', correspondent deux valeurs θ_1, θ_2, de θ. Si l'on construit sur les côtés du triangle A'B'C', vers l'intérieur, trois triangles isoscèles semblables, ayant pour angles à la base θ_1 ou θ_2, les sommets de ces triangles se trouvent sur deux droites rectangulaires passant par le centre de gravité de A'B'C'. Ces droites ont été signalées pour la première fois par M. Brocard; comme elles sont les axes de l'ellipse de Steiner A'B'C', on peut les appeler *axes de Steiner* de A'B'C' et donner aux angles θ_1, θ_2 le nom de *angles de Steiner* de A'B'C'.

Les questions que je viens d'indiquer ont fait l'objet de de deux notes que j'ai présentées récemment en collaboration avec M. Gob, au Congrès de Paris.

M. Mosnat, professeur au lycée de Toulon, à propos du théorème de Pagès, nous fait observer que cette proposition peut s'établir très simplement, comme il suit :

1° *Coniques à centre.* — En appelant n la projection de MI sur MF et MF', les triangles MFI, MF'I donnent (avec les notations adoptées p. 169),

$$u^2 = \delta^2 + N^2 - 2\delta n = \frac{c^2 \delta^2}{a^2},$$

$$u'^2 = \delta'^2 + N^2 - 2\varepsilon\delta' n = \frac{c^2\delta'^2}{a^2}.$$

En retranchant, il vient

$$\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)(\delta^2 - \delta'^2) = 2n(\delta - \varepsilon\delta');$$

d'où

$$n = \frac{a^2 - c^2}{a^2} \cdot \frac{\delta + \varepsilon\delta'}{2} = \frac{b^2}{a} = p.$$

2° *Parabole.* — Les projections de MI sur MF et sur la parallèle MX à l'axe sont égales et cette dernière est égale à la sous-normale et par suite au paramètre ; donc $n = p$.

ÉCOLE NAVALE (1889)

Étant donnés deux axes rectangulaires Ox, Oy et un point M dont les coordonnées sont a, b; on demande de mener, par le point M, deux droites MA, MA′ faisant entre elles l'angle donné V et telles que les quatre points AB, A′B′ de rencontre avec les axes (A, A′ sont situés sur Ox) soient sur une même circonférence.

Le problème admet, pour chaque valeur de V, deux solutions : équations des deux circonférences qui correspondent à chacune d'elles; les distinguer (*).

2° Le point M étant fixe, on suppose que l'angle V varie d'une manière continue : démontrer que le lieu des centres de toutes les circonférences est une ligne droite (**) et qu'elles ont même axe radical (***) : étudier comment varie la grandeur du rayon; trouver les valeurs minima.

3° L'angle V étant constant, on suppose que le point M décrive une circonférence autour du point O comme centre. Trouver le lieu des centres de chacune de ces circonférences (****).

QUESTIONS PROPOSÉES

336. — Dans un triangle ABC, si AT est la tangente au cercle circonscrit, et si une sécante quelconque coupe AT, AB, AC en des points T′, B′, C′, démontrer que

$$\frac{AB}{AC'} - \frac{AC}{AB'} = \frac{BC}{AT'}.$$

(*Cl. Thiry.*)

(*) On trouve

$$\pm \cos V(x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2) = 2(bx + ay - ab).$$

(**) L'équation de cette droite est

$$a(x - a) = b(y - b).$$

(***) Il correspond à l'équation

$$bx + ay - ab = 0$$

Les circonférences du réseau considéré ayant le même axe radical, il était inutile de faire observer que le lieu des centres était une droite.

(****) En supposant

$$a^2 + b^2 = R^2,$$

on trouve, pour représenter le lieu demandé,

$$\left(y - \frac{x}{\cos V}\right)^2 + \left(x - \frac{y}{\cos V}\right)^2 = R^2 \operatorname{tg}^4 V.$$

Le lieu est constitué par l'ellipse correspondant à cette équation, et par une seconde ellipse dont l'équation se déduit de la précédente en changeant le signe de $\cos V$.

(Résultats communiqués par M. Bohn, maître répétiteur au collège de Verdun.)

337. — Avec les $2n$ éléments $\pm a$, $\pm b$, $\pm c$, ... $\pm l$, on forme 2^n polynômes, renfermant chacun *une* des lettres a, b, c,...l, et on élève ces polynômes à la puissance p, en mettant devant cette puissance le signe + ou le signe —, suivant que le nombre des éléments négatifs du polynôme est pair ou impair. Soit A_n^p la somme algébrique de tous ces termes. Démontrer que :

1° La fonction A_n^p est nulle pour toute valeur de p inférieure à n, et aussi pour toutes les valeurs de p qui surpassent n d'un nombre impair.

2° $A_n^n = 2^n \times 1.2.3 \ldots n \times abc \ldots kl.$

3° $A_n^{n+2} = 2^n \times 4.5.6 \ldots (n+2) \times abc \ldots kl \times (a^2 + b^2 + c^2 \ldots + l^2)$

4° $$A_2^{2q} = \frac{4.2q}{1} \cdot b . a^{2q-1} + 4b^3 \frac{2q(2q-1)(2q-2)}{1.2.3} \cdot a^{2q-3} + \ldots$$

5° $$n^n - n(n-2)^n + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-4)^n - \ldots$$
$$+ (-1)^p \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)}{1.2\ldots p}(n-2p)^n + \ldots$$
$$+ (-1)^n(-n)^n = 2^n \times 1.2.3 \ldots n.$$

(Dellac.)

338. — Soient A′, B′, C′ les projections des sommets du triangle ABC sur une droite quelconque d de son plan. On sait que les perpendiculaires abaissées de A′ sur BC, de B′ sur CA, de C′ sur AB, concourent en un même point D (*). Démontrer que les droites de Simson des points de rencontre de d avec la circonférence ABC passent par D Déduire, de là, le point de contact d'une droite de Simson avec son enveloppe.

(J. Neuberg.)

(*) *Nouvelle correspondance*, t. IV, p. 379, et *J. M. E.*, 1884, p. 49.

Le Directeur Gérant,
G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 18632-8-9.

SUR UN PROBLÈME CLASSIQUE

Par M. **G. Tarry.**

Le problème que nous envisageons dans cette Note est celui qui correspond à l'énoncé suivant :

Décrire une circonférence X *qui coupe trois circonférences données* A, B, C, *sous trois angles donnés* α, β, γ.

La méthode des figures inverses fournit une solution élémentaire de ce problème.

On sait que la courbe inverse d'une circonférence est une droite ou une circonférence, suivant que la circonférence passe ou ne passe pas par le centre d'inversion. On sait aussi que, si deux courbes se coupent sous un certain angle, les courbes inverses se coupent sous le même angle.

Supposons notre problème résolu, et construisons la figure inverse correspondante. Si deux des trois circonférences données se coupent, en choisissant l'un des points d'intersection pour pôle d'inversion, le problème sera évidemment ramené au suivant :

Décrire une circonférence qui coupe, sous des angles donnés, deux droites et une circonférence données.

Supposons que deux quelconques des trois circonférences données, dont les centres sont respectivement les points A et B, ne se coupent pas.

Soit O le point d'intersection de l'axe radical de ces deux circonférences avec la ligne des centres.

Du point O comme centre, construisons la circonférence qui coupe orthogonalement les circonférences A, B, et appelons P, P′ les points d'intersection de cette circonférence avec la droite AB.

Si nous choisissons pour centre d'inversion P ou P′, les circonférences A, B seront transformées en circonférences concentriques.

En effet, la circonférence orthogonale aux circonférences A et B a pour figure inverse une droite, perpendiculaire à AB,

coupant à angle droit les circonférences inverses de A et B; elle passe donc par leurs centres.

Il résulte de là que les circonférences inverses de A et de B, ont leurs centres sur une droite perpendiculaire à AB.

Il est presque évident que ces deux circonférences ont aussi leurs centres sur la droite AB.

Donc, elles sont concentriques, et le problème est ramené au suivant :

Décrire une circonférence qui coupe trois circonférences données, dont deux sont concentriques, sous trois angles donnés.

On simplifie la construction des points P, P′ en observant que ces points sont les intersections de la ligne des centres AB avec une circonférence quelconque, orthogonale aux circonférences A et B.

Nous allons résoudre successivement les deux cas particuliers auxquels peut se ramener, comme nous venons de le remarquer, le problème général.

1° *Décrire une circonférence* X *qui coupe deux droites données* RA, RB *et une circonférence donnée, sous trois angles donnés* α, β, γ.

Proposons-nous d'abord de construire une circonférence X coupant les deux droites RA, RB sous les angles α, β, et passant par un point A, pris sur la droite RA.

Supposons le problème résolu. Soit B l'un des points d'intersection de la circonférence X avec la droite RB.

Par hypothèse, la tangente en A, à la circonférence X, droite perpendiculaire au rayon XA, fait, avec la droite RA, un angle égal à l'angle α, ou à son supplément.

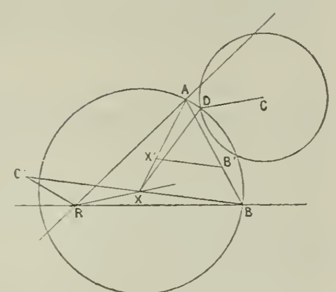
Par conséquent, la droite AX, fait, avec la droite RA, un angle égal à l'angle $\frac{\pi}{2} - \alpha$, ou à son supplément.

De même, la droite XB fait, avec la droite RB, un angle égal à $\frac{\pi}{2} - \beta$, ou à son supplément,

Les rayons XA, XB étant égaux, le point B s'obtiendra par la construction suivante :

Par un point quelconque X′ de la droite AX, qui fait, avec

la droite RA, un angle égal à l'angle $\frac{\pi}{2} - \alpha$, ou à son supplément, traçons la droite qui fait, avec RB, un angle égal à $\frac{\pi}{2} - \beta$, ou à son supplément, et prenons, sur cette droite, une longueur X'B' égale à X'A; la droite AB' coupe AB au point cherché. On voit que le problème a toujours quatre solutions réelles.



Cherchons maintenant le centre X de la circonférence qui coupe les droites RA, RB sous les angles α, β, et une circonférence C, sous un angle γ.

Soit D l'un des points d'intersection des circonférences X et C. Par hypothèse, l'angle XDC est égal à l'angle γ ou à son supplément, et les angles XAR, XBR sont égaux aux angles $\frac{\pi}{2} - \alpha$, $\frac{\pi}{2} - \beta$, ou à leurs suppléments.

Il est aisé de voir que les circonférences qui coupent RA, RB sous les angles $\frac{\pi}{2} - \alpha$, $\frac{\pi}{2} - \beta$ sont homothétiques et ont pour centre d'homothétie le point R.

Il résulte de là que l'on connaît la position de la droite RX et la valeur du rapport $\frac{XR}{XA} = \frac{XR}{XD}$.

Sur le côté XR, considéré comme homologue à XD, construisons le triangle XRC', directement semblable au triangle XDC.

On connaît l'angle XRC', égal à l'angle XDC, et la longueur RC', déterminée par la relation $\frac{RC'}{DC} = \frac{XR}{XD}$.

Nous savons donc construire le point C'.

D'ailleurs, la similitude des deux triangles XRC', XDC, donne la relation $\frac{XC'}{XC} = \frac{XR}{XD}$.

Par conséquent, le point X, situé sur la droite connue RX, se trouve aussi sur la circonférence qui est le lieu des points dont les distances aux points C', C, sont dans le rapport $\frac{XR}{XD}$.

D'après cela, le centre X de la circonférence cherchée est situé à l'intersection de ces deux lignes; le problème est résolu.

Il comporte évidemment huit solutions, réelles, ou imaginaires conjuguées.

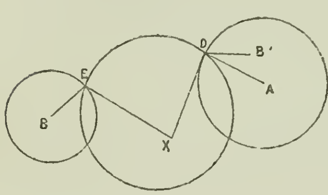
2° *Décrire une circonférence* X *qui coupe deux circonférences concentriques* A, B, *et une troisième circonférence* C, *sous les angles* α, β, γ.

Résolvons d'abord le problème suivant :

Connaissant deux circonférences A, B *et un point* D *pris sur* A, *construire une circonférence* X, *qui passe par* D, *et qui coupe* A *et* B *sous des angles* α *et* β.

Supposons le problème résolu. Soit E l'un des points d'intersection des circonférences X et B.

Par hypothèse, les angles XDA, XEB sont égaux aux angles α, β, ou à leurs suppléments.



Sur le côté XD, égal à XE, construisons le triangle XDB′ symétriquement égal au triangle XEB.

On connaît les angles ADX, XDB′; par suite, la position de la droite DB′, et celle du point B′, sont déterminées.

Le centre X, situé sur la droite connue DX, est également distant des points B, B′. Par conséquent, le centre de la circonférence cherchée est le point d'intersection de la droite DX avec la perpendiculaire élevée au milieu de la droite BB′.

Il y a quatre solutions.

Revenons au problème proposé.

Décrivons une circonférence qui coupe, sous les angles α, β, les circonférences concentriques A, B.

L'une des circonférences cherchées sera égale à cette circonférence et coupera la circonférence C, sous l'angle γ.

Or, le lieu géométrique des centres des circonférences égales, qui coupent sous un même angle une circonférence donnée, se compose de deux circonférences concentriques.

Donc, les centres des circonférences cherchées se trouvent à l'intersection de circonférences que l'on sait construire; le problème est résolu.

Il admet huit solutions, réelles ou imaginaires.

Remarque. — Nous avons vu que deux circonférences peuvent être transformées, par inversion, en deux droites ou en deux circonférences concentriques.

On déduit de là que trois circonférences ayant, deux à deux, le même axe radical, peuvent être transformées en trois droites concourantes ou en trois circonférences concentriques.

De cette propriété, on tire aisément les théorèmes suivants:

Si trois circonférences ont, deux à deux, le même axe radical; si, de plus, une autre circonférence se déplace en faisant, avec les deux premières, des angles constants, cette circonférence mobile fera, avec la troisième circonférence, un angle constant.

Si une circonférence L *se déplace en coupant respectivement deux circonférences* A *et* B *sous des angles* α *et* β; *elle reste orthogonale à une circonférence fixe et tangente à deux circonférences fixes.*

Quand les deux circonférences A, B, *ne se coupent pas, les deux circonférences fixes, tangentes, sont toujours réelles; et la circonférence fixe, orthogonale peut être imaginaire.*

Quand les deux circonférences A, B *se coupent, la circonférence orthogonale est toujours réelle; les deux circonférences tangentes peuvent être imaginaires.*

Les considérations précédentes conduisent naturellement à la solution du problème suivant :

Construire une sphère coupant quatre sphères données A, B, C, D, *sous quatre angles donnés* α, β, γ, δ.

Supposons que deux des quatre sphères données, A et B par exemple, ne se coupent pas.

Nous pouvons toujours transformer la figure, par inversion, de telle sorte que les figures inverses des sphères A, B soient des sphères concentriques; et le problème sera ramené à construire une sphère coupant quatre sphères données, dont deux sont concentriques, sous quatre angles donnés.

La solution s'obtient en suivant une marche identique à celle du problème correspondant de la Géométrie plane.

Supposons maintenant que les sphères A, B, C, D se coupent deux à deux.

La sphère cherchée, coupant les couples de sphères A, B; A, C; A, D, sous des angles constants, est orthogonale à trois sphères réelles, que nous savons construire.

Le problème est donc ramené, dans ce cas, à construire une sphère orthogonale à trois sphères données et coupant une quatrième sphère A sous l'angle α.

On voit immédiatement que l'axe radical des trois premières sphères passe par le centre de la sphère inconnue.

Il est clair que la grandeur et la position de la sphère cherchée ne changent pas, si l'on fait tourner les autres sphères autour de l'axe radical.

Nous pouvons donc supposer que les centres de ces sphères sont dans un même plan passant par l'axe radical

Ainsi le problème se trouve ramené à un cas particulier du problème correspondant de géométrie plane, que nous avons résolu.

Il admet seize solutions.

ESSAI

SUR LA

GEOMÉTRIE DE LA RÈGLE ET DE L'ÉQUERRE

(SECONDE PARTIE)

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite*, voir p. 202).

---

134. La hauteur du nuage. — Millet Dechales, dans l'ouvrage que nous avons cité à plusieurs reprises, abordant le problème de la hauteur des nuages dit « *tota difficultas quæ in hoc negotio occurrit ex nubium continuo motu oritur* ». Cette difficulté, dont parle Millet Dechales, qui tient à la mobilité incessante du point observé, nous l'avons déjà rencontrée quand nous nous sommes occupé, tout à l'heure, de la détermination de la hauteur du ballon; et nous l'avons trouvée

par le moyen de deux observations simultanées. Nous présentons, plus loin, plusieurs développements qui viennent se joindre à ceux que nous avons déjà fait connaître ; mais nous indiquerons d'abord certaines considérations générales, relatives au problème en question.

On sait quel est le principe, qui permet de calculer la hauteur d'un point A situé dans l'espace, au-dessus du plan de l'horizon.

Ayant choisi une base BC, on relève les angles ABC, ACB, ainsi que les hauteurs apparentes des lignes BA, CA. De ces données, on déduit facilement : 1° les longueurs AB, AC ; 2° la hauteur inconnue. En théorie, rien ne paraît plus simple. Il n'en est pas de même dans la pratique, et la difficulté que nous signalons ici résulte de ce fait, que les observations doivent être faites, *simultanément*, aux extrémités d'une base BC de grande dimension. Voici, à ce propos, un passage extrait du *Journal du Ciel* (*) ; il fera comprendre, en même temps, l'intérêt qui s'attache à la détermination de la hauteur des nuages, et les difficultés que comporte cette recherche.

« En Norwège et au Spitzberg, on n'éprouve pas, paraît-il, autant de difficultés que nous en avons rencontré, il y a quelques années, pour établir des téléphones, et M. Nils Ekholm a pu, avec des bases de différentes longueurs, y évaluer les hauteurs d'un certain nombre de nuages.

La publication qui nous apprend ce fait, ne nous donne pas les nombres qui ont été trouvés pour ces hauteurs, mais elle nous apprend que, dans un certain nombre de ces mesures, on s'est contenté d'une base de 500 mètres environ. Comme les hauteurs obtenues au Spitzberg et à Upsala ne nous diraient pas celles qu'atteignent ordinairement les nuages dans nos climats, il y a lieu d'y songer de nouveau.

Une base de 500 mètres nous avait paru insuffisante, avec des instrument ne donnant que la minute d'arc, comme des graphomètres ordinaires, cela devait laisser des incertitudes de plusieurs mètres dans le résultat du calcul ; mais nous reconnaissons que si, au lieu de graphomètres, on peut employer des théodolites donnant la moitié ou le quart de la minute, on doit espérer d'assez bonnes déterminations. Il y a donc lieu d'y songer de nouveau, d'autant plus que, si des deux extrémités de la base, en même temps que l'on vise le même point du nuage dans le plan qui va de la base au nuage, on mesure aussi la hauteur du point choisi du nuage au-dessus de l'horizon, on aura les éléments suffisants pour calculer deux fois la hauteur verticale du nuage ; et, quand les résultats concorderont, une très grande certitude de leur bonté.

Mais ce va être une véritable expédition. Il va falloir un téléphone,

---

(*) Numéro du 1er février 1883.

quatre théodolites, six opérateurs au moins. N'importe, songeons-y toujours : un jour ou l'autre, tout cela peut devenir réalisable.

Nous prions nos zélés correspondants d'étudier aussi ce qu'on pourrait obtenir avec la photographie. Rien d'impossible à ce que des vues prises du nuage et de l'horizon, dans les directions où devraient opérer les théodolites, ne permissent de mesurer les angles nécessaires. Quelques essais sur des points accessibles, tour, montagne, etc. renseigneraient à cet égard.

On se passerait alors de téléphone, et la base pourrait, avec de bonnes montres pour opérer au même instant, devenir aussi grande que l'on voudrait.

Millet Dechales (*loc. cit.*, p. 336) indique une méthode fondée sur la double observation de l'ombre portée par le nuage et de la hauteur apparente du Soleil, au-dessus de l'horizon, au moment de l'expérience. Mais ce procédé est compliqué et fort peu précis, par ce que la détermination de l'ombre d'un nuage est une chose difficilement réalisable et toujours très incertaine.

Voici comment on pourrait opérer pour résoudre d'une façon, à la fois simple et pratique, le problème actuel. La méthode que nous allons exposer s'appliquerait particulièrement bien aux nuages peu élevés au dessus de l'horizon. Nous montrerons plus loin comment, de cette observation, on déduit l'inconnue véritable du problème, c'est-à-dire la hauteur du nuage au-dessus de la Terre.

Soient AB, A'B', deux obstacles naturels, ou deux édifices très élevés, faisant l'office de grandes mires, et dont la distance AA' est suffisamment grande ; de 500 à 1000 mètres environ. Deux observateurs placés dans le voisinage : l'un de AB, l'autre, de A'B', et communiquant par le moyen du téléphone, observent un nuage N lorsqu'il vient rencontrer le plan vertical ABA'B'.

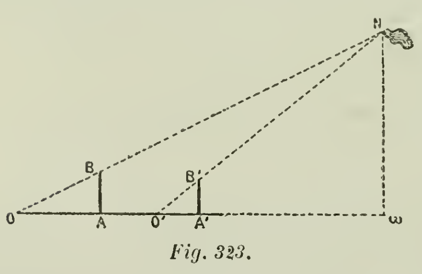


Fig. 323.

Soient O, O' les positions qu'ils occupent au moment que nous venons de définir ; les distances OA, O'A' peuvent être relevées avec soin, au moyen du ruban divisé, ou différemment ; enfin, les hauteurs AB, A'B', ainsi que la distance AA', sont connues très exactement. Cela posé, pour obtenir la hauteur : $N\omega = x$,

du nuage, au-dessus de l'horizon, on observera que

$$\frac{x}{AB} = \frac{O\omega}{AO}, \qquad \frac{x}{A'B'} = \frac{O'\omega}{O'A'}.$$

Mais on a

$$O\omega - O'\omega = OO' = OA + AA' - O'A'.$$

Par suite, $x\left(\frac{OA}{AB} - \frac{O'A'}{A'B'}\right) = OA + AA' - O'A'.$

Dans cette formule : AB, A'B', AA' désignent des nombres connus, une fois pour toutes; OA, O'A' sont donnés par l'observation faite sur le nuage déterminé; x désigne la hauteur du nuage au-dessus de l'horizon (commun aux deux observateurs) des points A, A'.

135. — La hauteur du nuage au-dessus de la Terre. — Le plan qui passe par les verticales AB, A'B', dont il a été question dans le paragraphe précédent, coupe la Terre suivant un grand cercle γ, de centre C; sa trace, sur le plan de l'horizon, est une certaine droite OH ; la hauteur que nous avons calculée tout à l'heure est Nω, distance du nuage à la droite OH. Mais la hauteur véritable du nuage, celle qu'il faut obtenir, c'est la distance du nuage à la Terre; celle-ci est comptée sur la verticale NC depuis N jusqu'au point Q, où elle rencontre γ.

Fig. 324.

Nous poserons

$$NOH = \alpha, \qquad N\omega = h,$$
$$CO = CQ = R.$$

Soit P le point où NC rencontre OH, les triangles semblables COP, NωP donnent :

$$(1) \qquad \frac{h}{R} = \frac{P\omega}{PO} = \frac{NP}{CP}.$$

D'autre part,

$$(2) \qquad h = (P\omega + PO)\ \text{tg}\ \alpha.$$

Les égalités (1), (2) permettent de calculer Pω et PO. On trouve ainsi :

$$P\omega = \frac{h^2 \cot\alpha}{h+R}, \qquad PO = \frac{hR\cot\alpha}{h+R}.$$

Les égalités (1) donnent aussi :

$$\frac{NP}{NP+CP} = \frac{NP}{NQ+R} = \frac{h}{h+R}.$$

Mais,

$$NP = \sqrt{h^2 + \overline{P\omega}^2} = \frac{h}{h+R}\sqrt{(h+R)^2 + h^2\cot^2\alpha}.$$

Finalement, la hauteur inconnue NQ se calculera par la formule :

$$NQ = \sqrt{(h+R)^2 + h^2\cot^2\alpha} - R.$$

Dans la pratique, si l'on veut appliquer commodément cette formule, on doit éviter les deux hypothèses extrêmes : celle de $\alpha = 90°$, et, aussi, celle qui correspond à $\alpha = 0°$. Dans le premier cas, on a $NQ = h$, mais la méthode d'observation que nous avons décrite se trouve en défaut. Dans l'autre cas, si $\alpha = 0$, on a $\cot g\, \alpha = \infty$ et $h = 0$; la formule présente un exemple d'indétermination apparente. Pour faire disparaître celle-ci, il faudrait remplacer $h \cot g\, \alpha$ par la distance du nuage à l'œil de l'observateur, distance qui est inconnue. C'est en prenant α dans le voisinage de 45°, qu'on réalisera, dans les conditions pratiques les meilleures, la détermination de la hauteur des nuages, par la méthode indiquée.

(A suivre.)

EXERCICES DIVERS

Par M. **A. Boutin**, professeur au collège de Courdemanche.

(*Suite*, voir p. 206.)

---

127. — Soit un triangle ABC décrit dans l'ordre des lettres. Par un point M de son plan on mène trois droites : MA′ parallèle à AB, MB′ parallèle à BC, MC′ parallèle à CA ; A′, B′, C′ étant respectivement situés sur les côtés BC, CA, AB. Par un autre point M_1, on mène M_1A'', M_1B'', M_1C'' respectivement parallèles à AC, CB, BA en tournant en sens inverse (*). Déterminer les points M, M_1, de manière que les triangles ABC, A′B′C′, A″B″C″

(*) Si l'on pose

$$MA' = u, \qquad MB' = v, \qquad MB = w;$$
$$M_1A'' = U, \qquad M_1B'' = V, \qquad M_1C'' = W;$$

la somme $u^2 + v^2 + w^2$ est minimum au second point de Brocard (celui dont les coordonnées barycentriques sont proportionnelles à $\frac{1}{c^2} \frac{1}{a^2} \frac{1}{b^2}\Big)$. De même, $U^2 + V^2 + W^2$ est minimum au second point de Brocard.

On peut encore vérifier les propriétés suivantes :

1° les quantités $\sqrt{u} + \sqrt{v} + \sqrt{w}$, $\sqrt{U} + \sqrt{V} + \sqrt{W}$ sont minimums, aux points réciproques du second et du premier point de Jérabek. (Ces réciproques sont les *Brocardiens* du centre du cercle inscrit ; ils ont pour coordonnées barycentriques, respectivement, $\frac{1}{c}, \frac{1}{a}, \frac{1}{b}; \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{a}.\Big)$

2° $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w}, \frac{1}{U}, \frac{1}{V}, \frac{1}{W}$ sont minimums aux brocardiens du point $(\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c})$.

aient même angle de Brocard. La figure jouit alors des propriétés suivantes :

1° Les points M, M_1 sont confondus avec le point de Lemoine, K, de ABC.

2° Ce point commun K est le point direct de Brocard, de A′B′C′, le point rétrograde de Brocard, de A″B″C″.

3° Les triangles A′B′C′, A″B″C″ sont égaux entre eux et semblables à ABC. Le rapport de similitude de l'un d'eux à ABC est $\frac{1}{2\cos\theta}$ (θ angle de Brocard, de ABC).

4° Les côtés de chacun de ces triangles font, avec les côtés de ABC, des angles égaux, comptés dans un même sens de rotation, c'est-à-dire qu'on a les égalités :

$$B'A'C = C'B'A = A'C'B = \theta,$$
$$A''B''C = B''C''A = C''A''B = \theta.$$

5° Les triangles ABC, A′B′C′ ont même point rétrograde de Brocard. Les triangles ABC, A″B″C″ ont même point direct de Brocard.

6° Les triangles A′B′C′, A″B″C″ sont inscriptibles à un même cercle; le centre de ce cercle est le centre du cercle de Brocard O_1 de ABC.

7° On a l'égalité :

$$B''C' = C''A' = A''B' = R \operatorname{tg} \theta.$$

(R rayon du cercle circonscrit à ABC.)

8° On peut amener les triangles, A′B′C′, A″B″C″, à coïncider, en faisant tourner l'un d'eux, autour du centre commun O_1 de leur cercle circonscrit, dans un sens convenable, d'un angle égal à 2θ.

Soient x, y, z, α, β, γ, α_1, β_1, γ_1, les coordonnées normales de M, et les angles: MA′C′, MB′A′, MC′B′, M_1A″B″, M_1B″C″, M_1C″A″.

On trouve aisément :

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{MA'}{MC' \sin A} + \operatorname{cotg} A,$$

. . . .

$$\operatorname{cotg} \alpha_1 = \frac{M_1A''}{M_1B'' \sin A} + \operatorname{cotg} A,$$

. . . .

D'ailleurs :

$$MA' = \frac{x}{\sin B}, \qquad MB' = \frac{y}{\sin C}, \qquad MC' = \frac{z}{\sin A},$$
$$MA'' = \frac{x}{\sin C}, \qquad MB'' = \frac{y}{\sin A}, \qquad MC'' = \frac{z}{\sin B};$$

d'où, pour les équations du problème :

$$\frac{x}{z \sin B} + \operatorname{cotg} A = \operatorname{cotg} \theta,$$

. . . .

Ces six équations sont simultanément vérifiées pour :

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$

ce qui montre bien que M, M_1, et K (point de Lemoine, de ABC) sont confondus.

2° Cette propriété résulte immédiatement des égalités :

$$\alpha = \beta = \gamma = \theta,$$
$$\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = \theta,$$

qui se déduisent du paragraphe précédent.

3° On a : $$\overline{A'C'}^2 = \overline{MA'}^2 + \overline{MC'}^2 + 2MA'.MC' \cos A$$
$$= R^2 \operatorname{tg}^2 \theta \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{c^2}{a^2} + \frac{2ac \cos A}{ab}\right)$$
$$= R^2 \operatorname{tg}^2 \theta \, . \, \frac{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}{a^2b^2};$$

d'où $$\frac{A'C'}{c} = \frac{C'B'}{b} = \frac{B'A'}{a}.$$

De même : $$\frac{A''B''}{b} = \frac{B''C''}{c} = \frac{C''A''}{a}.$$

De ces égalités résulte la similitude des triangles : ABC, A'B'C', A''B''C''. D'ailleurs, les six rapports précédents sont égaux. On a donc :

$$A'C' = B''C'', \quad C'B' = A''B'', \quad B'A' = C''A''.$$

Le carré du rapport de similitude a pour valeur

$$\rho^2 = R^2 \operatorname{tg}^2 \theta . \frac{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}{a^2b^2c^2}.$$

Mais, d'après une formule connue,

$$a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 = \frac{4S^2}{\sin^2 \theta};$$

$$\rho^2 = \frac{R^2 \operatorname{tg}^2 \theta}{a^2b^2c^2} . \frac{4S^2}{\sin^2 \theta} = \frac{1}{4 \cos^2 \theta};$$

$$\rho = \frac{1}{2 \cos \theta}.$$

4° $C'A'B' = B$, donc $KA'B' = B - \theta$; et, par suite,

$$B'A'C = \theta.$$

On vérifie, de même, les autres égalités.

5° Menons la droite $A'\Omega$ faisant, avec A'B', l'angle θ ; et la droite $B\Omega$ faisant, avec BC, l'angle θ; puis cherchons la distance x de BC à leur point de rencontre.

On a : $$\Omega A' = BA',$$

$$x_1 = BA' \sin 2\theta = \frac{c \operatorname{tg} \theta}{2 \sin B} \sin 2\theta = \frac{c \sin^2 \theta}{\sin B}.$$

Or, ce rapport exprime la distance, à BC, du point rétrograde de Brocard. Donc, Ω se confond avec le point en question. On verrait de même que Ω', point direct de Brocard, de ABC, est aussi point direct de Brocard, de A''B''C''.

6° $$\mathrm{BA}' = \frac{z}{\sin B}, \qquad \mathrm{BA}'' = a - \frac{y}{\sin C},$$
$$\mathrm{BC}' = c - \frac{y}{\sin A}, \qquad \mathrm{BC}'' = \frac{x}{\sin B};$$
$$\mathrm{BA}'.\mathrm{BA}'' = \frac{z}{\sin B}\left(a - \frac{y}{\sin C}\right),$$
$$\mathrm{BC}'.\mathrm{BC}'' = \frac{x}{\sin B}\left(c - \frac{y}{\sin A}\right).$$
De là, on tire aisément : $\mathrm{BA}'.\mathrm{BA}'' = \mathrm{BC}'.\mathrm{BC}''$; ce qui montre que les quatre points A′, A″, C′, C″ sont sur une même circonférence. On verrait, de même, qu'elle passe par les points B′, B″.

On sait que la perpendiculaire au milieu de la droite qui joint les points de Brocard, d'un triangle, passe par le centre du cercle circonscrit à ce triangle. Ainsi, les perpendiculaires élevées aux milieux de KΩ, KΩ′ se coupent au centre O_1 du cercle circonscrit aux triangles A′B′C′, A″B″C″ ; mais ce point, ainsi déterminé, est justement le centre du cercle de Brocard de ABC.

7° On a
$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{B''C'}}^2 &= \overline{\mathrm{AC'}}^2 + \overline{\mathrm{AB''}}^2 - 2\mathrm{AC'}.\mathrm{AB''}\cos A \\ &= \frac{1}{\sin^2 A}(y^2 + z^2 - 2yz\cos A) \\ &= \frac{R^2 \operatorname{tg}^2\theta}{\sin^2 A}(\sin^2 B + \sin^2 C - 2\sin B \sin C \cos A) \\ &= R^2 \operatorname{tg}^2\theta ;\end{aligned}$$
$$\mathrm{B''C'} = R \operatorname{tg}\theta = \mathrm{C''A'} = \mathrm{A''B'}.$$
8° Soit φ l'angle $\mathrm{B''O_1C'}$:
$$\mathrm{B''C'} = 2\mathrm{O_1B''}.\sin\frac{\varphi}{2},$$
$$R \operatorname{tg}\theta = \frac{R}{\cos\theta}\sin\frac{\varphi}{2};$$
d'où, enfin, $$\varphi = 2\theta.$$

(A suivre.)

ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE

Épure du concours de 1838, pour l'admission à l'École spéciale militaire.

Un tétraèdre SABC, *dont la face* ABC *est située sur le plan horizontal, est déterminé de la manière suivante : le sommet* S *a pour cote* 70mm *et pour éloignement* 30mm. *L'arête* SA *est dans un plan de profil, et le point* A *a pour éloignement* 115mm. *La face* SBC *(*B *à gauche) est parallèle au plan vertical. Les faces* SAB *et* SAC *font chacune, avec le plan de profil qui contient l'arête* SA, *un angle de* 45°.

Sur l'arête SB, *on prend, entre* S *et* B, *un point* D *à* 20mm *du sommet* S; *et, par ce point* D, *on mène un plan perpendiculaire à l'arête* SB; *ce plan coupe* SC *en* E *et* SA *en* F.

1° Construire les projections du triangle DEF;

2° On considère la sphère qui a DE *pour diamètre: représenter le solide commun à cette sphère et au tétraèdre.*

(Durée de la séance: 2 h. $\frac{1}{2}$.)

Nous avons construit l'épure à l'échelle $\frac{4}{5}$.

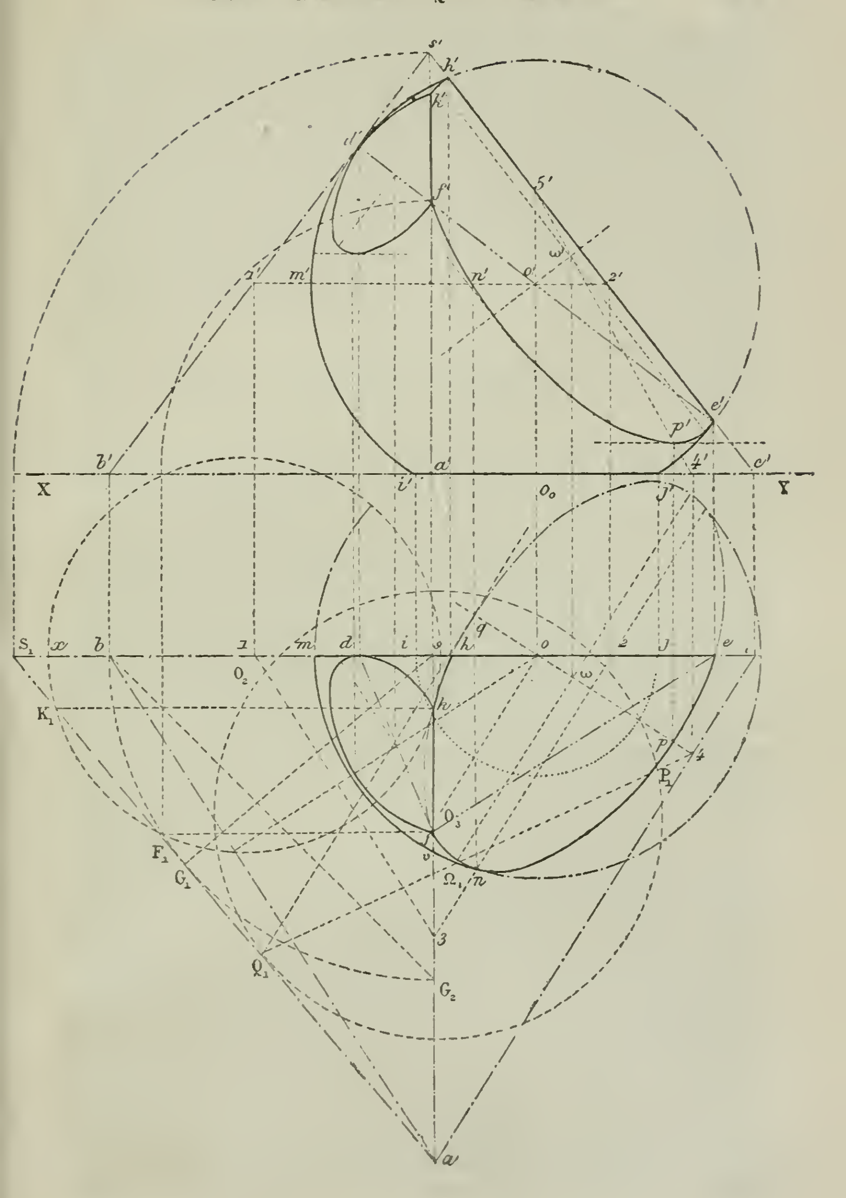
On représente les points s, s' et a, a'; la parallèle sx menée par s, à la ligne de terre XY, est la trace de la face aSc. Les traces ab et ac, des faces Sab et Sac, s'obtiennent en appliquant le problème, bien connu, qui consiste à mener, par une droite située dans un plan donné, un plan faisant un angle donné avec le plan donné: on rabat, autour de as, sur le plan horizontal, en S_1a l'arête Sa; on mène la perpendiculaire sG_1 à S_1a; on prend, sur sa, la longueur sG_2 égale à sG_1; on mène les droites G_2b et G_2c faisant, avec as, des angles de 45° et coupant sx en b et c; on a ainsi les traces cherchées ab et ac.

Après avoir pris $s'd'$ égale à la longueur donnée SD, on obtient d. Le plan mené par D, perpendiculaire à l'arête de front Sb est de bout; sa trace verticale est la perpendiculaire $d'e'$ à $s'b'$. Ce plan coupe l'arête Sc en e', e, et l'arête Sa en f', f. Comme Sa est dans un plan de profil, on se sert de son rabattement S_1a pour obtenir le rabattement F_1 de F, et ensuite sa projection f.

1° Les projections des côtés du triangle DEF sont dessinées en traits mixtes. Le triangle DEF est rectangle en F.

2° Les projections o et o', du centre de la sphère, et ses contours apparents s'obtiennent aisément. Cette sphère passe par le point F.

Le grand cercle d'intersection de la sphère avec la face de front Sbc, et le petit cercle d'intersection de la sphère avec la face horizontale abc se projettent en vraie grandeur; le premier verticalement, sur le contour apparent vertical de la sphère, le second horizontalement, selon un cercle de diamètre ij sur bc.


s'
h'
k'
d'
f'
5'
ω'
m'
n'
o'
2'
e'
p'
b'
a'
4'
c'
X
i'
o_0
j'
Y
S_1
x
b
1
m
d
i
h
q
o
2
j
e
O_2
ω
K_1
k
p
4
P_1
O_3
F_1
G_1
Ω_1
n
3
Q_1
G_2
a

L'arête SB est tangente à la sphère, en D; ses projections sont tangentes aux projections de l'intersection. L'arête Sc coupe la sphère aux points e, e' et h, h'. On obtient les points où l'arête de profil Sa coupe la sphère en rabattant autour de sa, sur le plan horizontal : en S_1a, l'arête Sa; en O_2 le centre du cercle section de la sphère par le plan de profil ass' ; sO_2 égale o_0o'; le rayon du cercle rabattu égale sv; S_1a coupe le cercle rabattu en deux points, dont l'un est le rabattement F_1 de f, f' et dont l'autre est K_1; de K_1, on déduit les projections k et k'.

Les points utiles de l'intersection, situés sur le contour apparent vertical de la sphère, sont d', d; e', e; h', h. Le plan horizontal $1'.2'$, passant par le centre de la sphère, coupe le tétraèdre selon des horizontales projetées horizontalement en 1.2, 2.3, 1.3 ; on a ainsi les points utiles m, m' et n, n' de l'intersection, situés sur le contour apparent horizontal de la sphère.

On peut obtenir, par relèvement, les projections d'un point quelconque de l'intersection de la sphère et de chacune des deux autres faces, après avoir rabattu la face considérée autour de sa trace horizontale, sur le plan horizontal, et avoir construit le rabattement du cercle d'intersection ; puis les projections de la tangente, en ce point, à l'intersection. Comme les portions utiles des projections de l'intersection ont une grande longueur, nous avons préféré construire les axes des ellipses projections et dessiner ces courbes connaissant leurs axes.

La perpendiculaire menée de o, o', à la face Sac, a ses projections respectivement perpendiculaires à ac et e' h'; le plan qui la projette horizontalement coupe la face Sac selon une droite dont la projection verticale $4'.5'$ donne la projection verticale ω' du centre du cercle d'intersection de la sphère et de la face Sac; d'où l'on a ω. On obtient le rayon de ce cercle en rabattant, autour de $o\omega$, sur le plan horizontal, le centre Ω en Ω_1, le centre O en O_3. Les rabattements de la section de la sphère et de celle de la face Sac par le plan vertical $o\omega$ se coupent en P_1 et en Q_1; de ces points, on déduit les extrémités p et q du petit axe de l'ellipse, projection horizontale de la section considérée. Le grand axe de cette ellipse égale P_1Q_1

et se projette sur la perpendiculaire en ω à $o\omega$. On construit de même l'ellipse projection verticale de la section considérée : en p', la tangente à cette ellipse est parallèle à XY.

Nous avons construit de même les ellipses projections de l'intersection de la sphère et de la face Sab.

La projection horizontale du demi-cercle d'intersection de la sphère et du tétraèdre est la seule ligne cachée, des projections du corps demandé.

BIBLIOGRAPHIE

Companion to the Weekly Problem Papers, *intended for the use of students preparing for mathematical scolarship and for the junior members of the Universities who are reading for mathematical honours, by the Rev.* John J. Milne *M. A.* (Londres. Mac-Millan et Cie, éditeurs). 1 vol. XXVIII, — 340 pages. Prix : 10 sh. 6 d. = 13 fr. 10 c.

L'ouvrage paru récemment sous le nom modeste de *Companion* est le complément des *Weekly Problem Papers* et de leurs *Solutions*, du même auteur. Il traite des matières généralement négligées dans les manuels en usage et qui, cependant, sont indispensables à tous ceux qui veulent s'initier aux différentes méthodes scientifiques permettant de résoudre facilement les diverses questions proposées dans les examens.

Afin d'obtenir un livre aussi précis que complet, M. Milne a fait appel à la collaboration de mathématiciens que leurs travaux antérieurs désignaient naturellement pour traiter les sujets qui y sont développés.

Chaque théorie est suivie d'un grand nombre de problèmes, bien choisis et très variés, qui rendent le *Companion* encore plus précieux. L'ouvrage est divisé en sections et chapitres, dont voici le sommaire :

I. Théorie des maximums et minimums; 1° partie algébrique (pages 4-14) avec note de M. Genèse (14-16); 2° partie géométrique (17-43). L'auteur a consulté, dans cette section, les ouvrages de Cresswell (1 vol. 300 p., 1817), de Ramchundra (Londres 1859) et les mémoires de M. Elliot, parus récemment dans *The Messenger of Mathematics* (vol. IX et XIV). — II. Partie élémentaire de la théorie des enveloppes : 1° partie algébrique (47-53) : 2° partie géométrique (54-66), avec note de M. Davis (66-68). — III. Applications des propriétés du centre de gravité à la Géométrie, par M. Davis (69-75) suivies de problèmes, proposés par M. Genèse, et dont la solution dépend de la composition des forces non parallèles (76-77). — IV. Coordonnées biangulaires, par M. Genèse, avec applications à la droite (78-82), aux coniques (82-85) et à l'équation générale du second degré (85-98). — V. Introduction à la Géométrie récente du triangle, par le Rev. T. C. Simmons. Ce chapitre forme l'article le plus long et certainement le plus important de l'ouvrage de M. Milne. C'est un admirable résumé de la Géométrie brocardienne ; il n'en existe pas de plus complet en France,

M. T. C. Simmons traite, successivement, des droites antiparallèles, des droites isogonales et des points inverses (99-103), des points et de l'ellipse de Brocard (104-111). Dans cette partie, l'auteur a introduit, avec le plus grand succès, la considération de l'excentricité de l'ellipse de Brocard, qui lui permet d'obtenir des formules simples et élégantes. Viennent ensuite le point et le premier cercle de Lemoine (112-120), le cercle et le premier triangle de Brocard (121-126), les cercles de Tucker (127-137), le second cercle de Lemoine, et le cercle de Taylor (138-146). Après ces questions, qui ont été en partie traitées dans ce journal et qui sont connues de nos lecteurs, M. Simmons fait l'étude des triangles co-Symédians et co-Brocardiens (*) (147-162); il donne ensuite des constructions et des théorèmes divers, (163-173) qu'il fait suivre de nombreuses questions proposées. Enfin, l'auteur termine par des notes historiques (180-184), où il rappelle les origines de la Géométrie du triangle et la marche de ses développements. Comme on le voit par ce qui précède, le travail de M. Simmons forme un excellent traité sur le triangle : la lecture en est indispensable à ceux qui désirent avoir une idée exacte de la Géométrie du triangle qui est, comme l'a dit M. Davis à l'Association pour l'avancement géométrique, *le progrès le plus remarquable et le plus intéressant qu'aient fait les Mathématiques élémentaires en ces derniers temps.* Il est à regretter que M. Simmons n'ait pas parlé des points et des transversales réciproques ainsi que des points brocardiens, qui jettent tant de lumière dans les rapports des éléments entre eux, et qu'il n'ait pas consacré un chapitre aux généralisations dont le triangle a été l'objet : nous voulons parler des *polygones et polyèdres harmoniques*, fruits des belles recherches de MM. Neuberg, Tarry, Casey et Simmons lui-même. — VI. Théorème de Feuerbach (185-191). — VII. Théorie de l'inversion ; inverseurs de Peaucellier et de Hart, podaires des coniques (192-204), par M. Langley. — VIII. Constructions géométriques et mécaniques (205-211), par M. Genèse. — IX. Théorie de l'élimination (212-221), avec note de M. Simmons (221-224). — X. Sommations des séries (225-232). — XI. Séries binomiales (233-239) par M. Davis. — XII. Identités algébriques et trigonométriques (240-247), par M. Davis. — XIII. Questions diverses d'algèbre, de trigonométrie et de géométrie des coniques (248-260). — XIV. Longueurs des tangentes et des normales aux coniques (261-268). — Nouvelles solutions de questions des *Weekly Problem Papers* (269-286). — XIV. Questions d'examens, posées, antérieurement à 1886, dans les différents collèges de Cambridge (281 questions).

Les chapitres dont l'auteur n'a pas été spécifié sont dus à M. Milne.

Ainsi qu'il est facile de s'en convaincre par le court résumé qui précède, le *Companion* touche à toutes les questions qui, sans faire partie des programmes officiels, sont du domaine des Mathématiques élémentaires. L'ouvrage de M. Milne et de ses collaborateurs sera donc de la plus grande utilité, et nous espérons qu'il sera lu avec fruit par les professeurs et par les élèves.

E. Vigarié.

(*) Deux triangles sont co-symédians ou co-Brocardiens suivant qu'ils ont mêmes symédianes ou mêmes points de Brocard. L'étude de ces triangles a surtout été faite par MM. Tucker et Casey.

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES COMPLET

SESSION D'AVRIL 1889 (*)

PARIS

1re Série. — 1° Étant donnés un cercle Δ de rayon R et une droite fixe AB tangente, en A, à Δ; trouver, sur la circonférence, un point M, tel qu'en abaissant, de ce point, la perpendiculaire MP sur la tangente AB, on ait $MP + AP = a$; a désignant une *longueur* donnée.

Discussion.

$$\textit{Réponse} : x = \frac{a + R \pm \sqrt{(a + R)^2 - 2a^2}}{2} \ (^{**}).$$

(*) Ces énoncés, et les résultats qui les accompagnent, sont empruntés aux *Nouvelles Annales scientifiques et littéraires*, publiées par la librairie Croville-Morant.

(**) Dans cette formule, x désigne la distance MP.

On peut résoudre cette question (et beaucoup d'autres, analogues) par la méthode, si élégante, des lieux géométriques. C'est ainsi que, dans le cas proposé, on peut observer que le lieu d'un point M, tel que $MP + AP = a$ est une droite D, rencontrant la tangente donnée ainsi que le diamètre perpendiculaire, à une distance a du point A. En construisant cette droite, on résout *géométriquement* le problème. Quant à la discussion demandée et à l'interprétation des valeurs négatives des variables MP, AP, elles résultent, bien simplement, de la méthode que nous indiquons ici. Le problème est possible, si D rencontre le cercle donné en des points réels M', M''; c'est-à-dire si la distance du centre O, de Δ, à la droite D, est plus petite que le rayon de Δ. En menant à Δ une tangente perpendiculaire à la bissectrice de l'angle OAB, on a la position limite D', des droites D.

Si l'on suppose que D' se transporte parallèlement à elle-même jusqu'à ce qu'elle passe par A', point diamétralement opposé à A, on a une nouvelle position D'', de la droite D. Entre D', D'', les transversales considérées donnent deux solutions réelles, pour lesquelles la relation $MP + AP = a$ est vérifiée par des valeurs positives de MP et de AP.

En poursuivant son mouvement, la droite D viendra passer par A; soit D''' cette position. Entre D'' et D''' la transversale rencontre Δ en deux points : pour l'un d'eux, la relation est vérifiée, MP et AP étant positifs ; pour l'autre, elle est encore vérifiée, mais en supposant MP positif et AP négatif.

Enfin, soit D^{IV} la tangente parallèle à D'. Pour les positions de D comprises entre D''' et D^{IV}, l'égalité proposée est encore vérifiée, mais en prenant MP positivement et AP négativement, pour l'un et l'autre des deux points trouvés. G. L.

2° Volume engendré par un segment de cercle tournant autour d'un diamètre extérieur au segment. Démonstration.

2e Série. — 1° On donne un cercle et un de ses diamètres AOB. On demande de mener un second diamètre COC′, de manière que si l'on fait tourner les segments circulaires AMC et AM′C′, autour de AB, le volume V′ engendré par le second segment soit le triple du volume V engendré par le premier.

On calculera le cosinus de l'angle AOC.

Réponse : $\cos x = 2 - \sqrt{3}$.

2° Énoncer la loi de Képler et la loi de Bode.

3e Série. — 1° Résoudre
$$x + y = a$$
$$x^3 + y^3 = b^3.$$

N.-B. — La condition de réalité est
$$a(4b^3 - a^3) > 0;$$

2° Dans un triangle ABC dont la hauteur est AD on donne
$$BD = 3, \quad AB = 5, \quad DC = 4.$$

On demande d'évaluer la surface du triangle et le côté AC,

On donnera la valeur du côté AC, à $\frac{1}{1000}$ près.

Réponse : $S = 14^{mq}$ ou 2^{mq}; $AC = 5^m,656$.

4e Série. — 1° On donne les longueurs a, b, c des côtés d'un triangle. On demande de calculer les volumes engendrés par ce triangle tournant successivement autour de ses trois côtés.

Faire l'application numérique en prenant $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$.

Réponse : $Va = 16\pi$; $Vb = 12\pi$; $Vc = \frac{48\pi}{5}$.

2° Conditions d'équilibre du levier.

5e Série. — On donne les longueurs $2a$, $2b$, des diagonales d'un losange ABCD′. On demande de calculer :

1° Le rayon du cercle inscrit au losange ;

2° Les cosinus des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BCD}$.

Réponse :
$$\begin{cases} 1° \quad r = \dfrac{ab\sqrt{a^2 + b^2}}{a^2 + b^2}. \\ 2° \quad \cos ABC = -\cos BCD = \dfrac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2}, \end{cases}$$

2° Construire l'angle de deux plans dont les traces sont parallèles à la ligne de terre.

QUESTION 288

Solution et développement par M. d'O.

Soient A, C *deux sommets opposés d'un rectangle* ABCD ; *la perpendiculaire* CH, *abaissée de* C *sur* BD, *rencontre la bissectrice de* BAD *en* P. *Démontrer que* CP = CA. G. L.

Posant $\widehat{CAD} = \omega$, on a, immédiatement :

$$\widehat{CAP} = \frac{\pi}{4} - \omega, \quad \widehat{ACP} = \pi - OCH = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - 2\omega\right) = \frac{\pi}{2} + 2\omega.$$

Donc,

$$\widehat{APC} = \pi - \left(\frac{\pi}{4} - \omega\right) - \left(\frac{\pi}{2} + 2\omega\right) = \frac{\pi}{4} - \omega = \widehat{CAP}.$$

Par suite, le triangle CAP est isoscèle, et l'on a

$$CP = CA. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Remarque. — Soit Q le point où la bissectrice de $\widehat{ABC}$ coupe CP. On a :

$$\widehat{CBQ} = \frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2}, \qquad \widehat{BCQ} = \frac{\pi}{2} - \omega;$$

donc, $$\widehat{CQB} = \pi - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2}\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2} = \widehat{CBQ}.$$

Ainsi, $$CQ = CB.$$

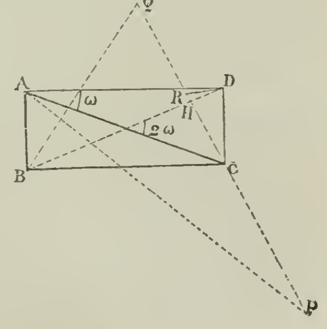
De même, si la bissectrice de $\widehat{BDA}$ coupe CP en R,

$$\widehat{DCR} = \omega, \qquad \widehat{CDR} = \frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2};$$

par suite, $$\widehat{CRD} = \pi - \omega - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2} = \widehat{CDR},$$

d'où l'on conclut $$CR = CD.$$

Le théorème qui fait l'objet de cette question se trouve donc complété, et, en adoptant un changement de notation, on peut alors l'énoncer ainsi.



Soient ABC *un triangle rectangle en* A, M *le symétrique de* A *par rapport au milieu de l'hypoténuse* BC. *Si la perpendiculaire abaissée, de* M, *sur* BC, *coupe respectivement en* A_1, B_1, C_1, *les bissectrices des angles* A, B, C, *de ce triangle, on a :*

$$MA_1 = BC, \qquad MB_1 = AC, \qquad MC_1 = AB.$$

Nota. — Solutions diverses par MM. E. Vigarié, étudiant à Toulouse ; E. Baudran, élève au cours de Saint-Cyr, au lycée de Rouen ; Henry Galopeau,

étudiant à Bordeaux : Le Goff, à Lesneven (Finistère) ; A. Boutin, professeur au collège de Courdemanche; I. Beyens, capitaine du génie, à Cadix; G. Lavieuville, professeur au collège de Dieppe.

QUESTION 291

Solution par M. A. Emmerich, professeur à Mülheim an der Ruhr (Prusse).

Résoudre l'équation :

$$\alpha(x^2 - px + q)^2 + \beta(x^2 + px + q)^2 = x^2.$$

G. L.

Introduisons l'inconnue auxiliaire ξ, et posons $x^2 + q = px\xi$. L'équation proposée prend la forme

$$\alpha(\xi - 1)^2 p^2 + \beta(\xi + 1)^2 p^2 = 1.$$

On trouve, en supposant $\alpha + \beta \neq 0$ (*),

$$\xi = \frac{\alpha - \beta \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha + \beta}{p}\right)^2 - 4\alpha\beta}}{\alpha + \beta}.$$

ce qui, avec $x = \frac{p\xi}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p\xi}{2}\right)^2 - q}$, résout le problème.

Nota. — Solutions diverses par MM. A. Boutin, professeur au collège de Courdemanche; Youssoufian, à Constantinople; J. Beyens, capitaine du génie, à Cadix; Studler, chargé de cours au lycée de Rodez.

QUESTION 292

Solution par M. A. Boutin, professeur au Collège de Courdemanche.

Résoudre l'équation :

$$(x + b + c)(x + c + a)(x + a + b)(a + b + c) - abcx = 0.$$

(G. L.)

Posons, pour abréger :

$$a + b + c = S,$$

(1) $$x = y - S.$$

(*) Si $\alpha = -\beta$, l'équation considérée est du troisième degré, et elle admet une racine nulle.

L'équation proposée devient :

$$S(y-a)(y-b)(y+c) - abc(y - S) = 0,$$

ou $$Sy^3 - S^2y^2 + Sy(ab+ac+bc) - abcy = 0$$

Cette équation admet la racine $y = 0$. On a donc,

$$x = -(a+b+c).$$

Les deux autres racines de l'équation en y sont données par l'équation du second degré :

$$Sy^2 - S^2y + S(ab+ac+bc) - abc = 0.$$

Quant aux valeurs correspondantes de x, elles se calculent par la formule (1).

Nota. — Solutions diverses par MM. J. Beyens, capitaine du génie à Cadix; Studler, chargé de cours au lycée de Rodez; A. Emmerich, à Mülheim-s/Ruhr (Prusse).

M. Emmerich observe, avec raison, que l'équation étant écrite sous la forme

$$\begin{vmatrix} x+b+c & a & 0 & 0 \\ 0 & x+c+a & b & 0 \\ 0 & 0 & x+a+b & c \\ x & 0 & 0 & a+b+c \end{vmatrix} = 0$$

en ajoutant, à la première colonne, les éléments des trois autres, la racine $x = -a-b-c$ apparaît ainsi.

QUESTION 295

Solution par M. Félix Ziegel, élève au Lycée Concorcet, (Institution Springer).

Soient α, β, γ *les centres de trois circonférences tangentes, deux à deux, aux points* A, B, C *(*A *étant le point de contact des circonférences* β *et* γ, *etc.).*

Les droites CB, AB *rencontrent* β *en des points* P, Q. *Démontrer que* PQ *passe par le centre de* β *et qu'elle est parallèle à* $\alpha\gamma$.

(Mayon, professeur au collège de Blois.)

En effet, C étant le centre de similitude de α et de β, les rayons βP et αB sont parallèles. Pour la même raison, les rayons βQ et γB sont parallèles. Par conséquent les droites βP et βQ se confondent suivant une parallèle à $\alpha\gamma$.

Nota. — Solutions analogues par MM. Alexandre Couvert, élève au lycée Condorcet; G. Lavieuville, professeur au collège de Dieppe; H. Youssoufian, professeur de mathématiques, à l'école Milkié, à Constantinople; H. Chatenet, élève au lycée de Limoges (classe de M. Nepveu).

QUESTIONS PROPOSÉES

339. — Soit ABDC un parallélogramme quelconque, et soient A'B'C' les seconds points de rencontre des droites DA, DB, DC, avec la circonférence circonscrite au triangle ABC. Démontrer que la droite A'D est la moyenne géométrique, en grandeur et en position, des droites A'C et A'B'. *(Gob.)*

340. — Les côtés de l'angle A d'un triangle ABC sont fixes; le côté BC roule sur une courbe donnée Δ. Démontrer que l'orthocentre H du triangle ABC, et le centre O du cercle circonscrit, décrivent deux figures symétriquement semblables. *(Neuberg.)*

341 — Construire un quadrilatère ABCD, connaissant les longueurs a, b, c, d des côtés AB, BC, CD, DA et la longueur f de la droite qui divise les diagonales AC, BD dans un rapport donné $m : n$. *(Neuberg.)*

Nota. — L'abondance des matières nous oblige à reporter au prochain numéro la fin de l'article de M. Boutin : *Sur les Centres isodynamiques...*

RECTIFICATIONS

Quelques erreurs typographiques se sont glissées dans le dernier numéro :

Page 193,	*au lieu de*	Bobilier,	*lisez*	Bobillier.
Page 212, ligne 14,	—	Veeten,	—	Vecten.
Page 213, ligne 4, en remontant,	—	podaire	—	polaire.

Le Directeur-gérant,
G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 20200-9-9.

PROPRIÉTÉS DU TRIANGLE RECTANGLE

Par M. **Louis Bénézech.**

(*Suite*, voir p. 193.)

Voici une propriété, suite naturelle de celles que nous avons signalées récemment (*), sur le triangle rectangle.

Théorème. — *Dans tout triangle* ABC, *rectangle en* A, *on a :*

$$P + P_a = P_b + P_c;$$

et RÉCIPROQUEMENT.

P, P_a, P_b, P_c *désignant, respectivement, les puissances des centres du cercle inscrit et des cercles ex-inscrits, par rapport au cercle circonscrit.*

En effet, dans un triangle quelconque, on a :

$$P = \overline{IO}^2 - R^2 = 2R\nu,$$

$$P_a = \overline{I_aO}^2 - R^2 = 2R\nu_a;$$

avec des formules analogues pour exprimer P_b, P_c.

On a donc

$$P + P_a - P_b - P_c = 2R(\nu_a - \nu - \nu_b - \nu_c).$$

Mais, si le triangle est rectangle, on a

$$\nu_a - \nu - \nu_b - \nu_c = 0,$$

et, par suite, $P + P_a = P_b + P_c$.

Réciproquement, si

$$P + P_a = P_b + P_c,$$

on a $\nu_a - \nu - \nu_b - \nu_c = 0$,

égalité qui exprime que le triangle est rectangle.

Remarque. — Les formules générales, écrites plus haut, donnent aussi :

$$P + P_a + P_b + P_c = 2R(\nu_a + \nu_b + \nu_c - \nu) = 8R^2.$$

On en déduit que, dans tout triangle rectangle :

$$P + P_a = P_b + P_c = 4R^2.$$

(*) Voyez, numéro de septembre, p. 193.

SUR LES CENTRES ISODYNAMIQUES

ET SUR LES CENTRES ISOGONES

Par M. **A. Boutin,** professeur au Collège de Courdemanche.

(*Suite et fin,* voir p. 198.)

XX. — *Les distances, aux sommets de* ABC, *d'un des centres isogones sont inversement proportionnelles aux coordonnées barycentriques de ce point.*

Soient $\delta_a = AV_2, \ldots$ On a (à un facteur constant près)

$$\delta_a^2 \sin^2 A = \cos^2(B-30^\circ)\cos^2(A-30^\circ) + \cos^2(C-30^\circ)\cos^2(A-30^\circ) + 2\cos^2(A-30^\circ)\cos(B-30^\circ)\cos(C-30^\circ)\cos A,$$

$$\frac{\delta_a^2 \sin^2 A}{\cos^2(A-30^\circ)} = 3\cos^2 B + 3\cos^2 C + \sin^2 A + \sin^2 C + \sqrt{3}(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C) + 6\cos A\cos B\cos C + 2\sin B\sin C\cos A$$
$$= 6 + \sqrt{3}\,\Sigma \sin 2A\; 6\cos A\cos B\cos C - \Sigma\sin^2 A = \text{constante};$$

d'ou
$$\frac{\delta_a \sin A}{\cos(A+30^\circ)} = \frac{\delta_b \sin B}{\cos(B-30^\circ)} = \frac{\delta_c \sin B}{(\sin C - 30^\circ)}.$$

De même si $\delta'_a = AW_7$

$$\frac{\delta'_a \sin A}{\cos(A+30^\circ)} = \frac{\delta_b \sin B}{\cos(B+30^\circ)} = \frac{\delta'_c \sin C}{\cos(C+30^\circ)}$$

XXI. — *Les rayons des cercles circonscrits aux triangles* BCV, ACV, ABV; BCW, ACW, ABW, *sont inversement proportionnels à* AV_2, BV_2, CV_2; AW_2, BW_2, CW_2.

XII. — *Les polaires des points* P_1, P_2, *par rapport à l'hyperbole de Kiepert, sont respectivement les droites* GV_2, GW_2.

D'après des théorèmes connus. la tangente à cette courbe en V_2 est VV_2; la tangente en G est GK : ces droites se coupent en P_2. De même la tanqente en W_2 est WW_2 qui coupe GK en P_2.

XXIII. — *Calcul des distances* VW_2, V_2W.

On a :

$$\overline{VW_2}^2 = \overline{VV_2}^2 + V_2\overline{W_2}^2 - 2VV_2 . V_2W_2 \cos VV_2W_2$$

$$2KV_2 . VV_2 \cos VV_2W_2 = \overline{KV_2}^2 + \overline{VV_2}^2 - \overline{KV}^2$$

d'où

$$\overline{VW_2}^2 = \overline{VV_2}^2 + \overline{V_2W_2}^2 - \frac{V_2W_2}{KV_2}(\overline{KV_2}^2 + \overline{VV_2}^2 - \overline{KV}^2).$$

Si l'on remplace par leurs valeurs dans le second membre toutes les quantités qui y figurent, on trouve, tous calculs faits :

$$\overline{VW_2}^2 = \frac{8S}{3(\cot\theta + \sqrt{3})}.$$

De même $$\overline{V_2W}^2 = \frac{8S}{3(\cot\theta - \sqrt{3})}.$$

XXIV. — *La circonférence des neuf points et chacune des circonférences circonscrites aux triangles équilatéraux podaires ont un point commun* Q, *le centre de l'hyperbole de Kiépert.*

Le centre Q. de l'hyperbole de Kiépert, est le milieu de V_2W_2. Q est d'ailleurs sur la circonférence des neuf points.

On a :

$$QP_1 = \frac{1}{2} VW_2 = \sqrt{\frac{2S}{3(\cot\theta + \sqrt{3})}} = \frac{C_1}{\sqrt{3}}.$$

QP_1 est le rayon du cercle circonscrit au premier triangle podaire équilatéral.

On verrait, de même, que Q est sur la circonférence circonscrite au deuxième triangle podaire équilatéral.

On peut observer que la droite KQ est une symédiane du triangle P_1P_2Q.

XXV. — *Les lignes* V_2W, VW_2 *se coupent au centre de gravité* G *de* ABC.

L'équation barycentrique de V_2W est

$$\Sigma\alpha \sin B \sin C \left(\frac{\cos(B + 30^\circ)}{\cos(C - 30^\circ)} - \frac{\cos(C + 30^\circ)}{\cos(B - 30^\circ)}\right) = 0.$$

Si l'on y fait $\alpha = \beta = \gamma = 1$; on a la condition pour que G soit sur cette droite, elle revient à

$$\sum \frac{\cos(A - 30^\circ)}{\sin A}(\cos 2B - \cos 2C) = 0,$$

identité facile à vérifier.

On constate, de même, que G est sur VW_2.

La figure formée par les centres isodynamiques et isogones est donc un trapèze dont les bases sont parallèles à la droite d'Euler ; le point de concours des diagonales est K ; le point de concours des côtés non parallèles est G.

XXVI. — *Distances* GV, GW, GV_2, GW_2, GP_1, GP_2.

Profitant de la remarque précédente et utilisant la formule

$$W_2V = \frac{2C_1}{\sqrt{3}},$$

on trouve :

$$GV = \frac{2C_1^3}{\sqrt{3}(C_2^2 - C_1^2)}, \qquad GW = \frac{2C_2^3}{\sqrt{3}(C_2^2 - C_1^2)},$$

$$GV_2 = \frac{2C_1^2C_2}{\sqrt{3}(C_2^2 - C_1^2)}, \qquad GW_2 = \frac{2C_1C_2^2}{\sqrt{3}(C_2^2 - C_1^2)}.$$

$$GP_1 = \frac{KP_1 \operatorname{cotg} \theta}{\sqrt{3}}, \qquad GP_2 = \frac{KP_2 \operatorname{cotg} \theta}{\sqrt{3}}.$$

On peut remarquer ces deux propositions :

Les distances du centre de gravité, aux centres isogones, sont proportionnelles aux côtés des triangles podaires équilatéraux.

Les distances du centre de gravité, aux centres isodynamiques, sont proportionnelles aux cubes des mêmes côtés.

XXVII. — *Les deux centres isodynamiques sont conjugués harmoniques par rapport à* OK.

Il suffit de vérifier que la polaire de V, par rapport au cercle de Brocard, contient le point W.

L'équation du cercle de Brocard étant :

$$\Sigma x^2 \sin \theta - \Sigma xy \sin (C - \theta) = 0,$$

l'équation de la polaire du point V est :

$$\Sigma \cos (A - 30^\circ)[2x \sin \theta - y \sin (C - \theta) - z \sin (B - \theta)] = 0,$$

Le point W sera sur cette droite, si on a :

$$\Sigma \cos(A - 30^\circ)\begin{bmatrix} 2\cos(A+30^\circ) - \cos(B+30^\circ)(\operatorname{cotg}\theta \sin C - \cos C) \\ - \cos (C + 30^\circ)(\operatorname{cotg} \theta \sin B - \cos B) \end{bmatrix} = 0.$$

Après transformations, cette identité revient à celle-ci :

$$\Sigma \cos (A - 30^o)(2 \sin B \sin C - \sqrt{3} \sin A) = 0,$$

qu'on vérifie aisément.

DES COORDONNÉES SOUS-TRILINÉAIRES

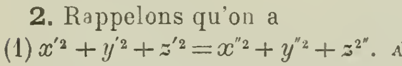
Par M. **Aug. Poulain**, à Angers.

---

1. — Soient x, y, z, λ, μ, ν les coordonnées trilinéaires et tripolaires d'un point M; x',y',z' trois segments non consécutifs, AC_1.... déterminés par x, y, z sur les trois côtés, c'est-à-dire le premier système de coordonnées sous-trilinéaires (*); x'', y'', z'', le second système (nous ne nous occuperons guère que du premier).

2. Rappelons qu'on a

(1) $x'^2 + y'^2 + z'^2 = x''^2 + y''^2 + z''^2$.



On le voit en ajoutant membre à membre les trois relations analogues à :

(2) $$\lambda^2 - \mu^2 = z'^2 - z''^2.$$

Si, dans (1), on remplace x'', .. par $a - x'$,... on trouve la relation constante entre x', y', z'. En appelant ω l'angle de Brocard, et posant

(3) $$\Delta = \frac{\Sigma \sin^2 A}{2} = 1 + \cos A \cos B \cos C$$
$$= \sin A \sin B \sin C \operatorname{cotg} \omega,$$

(*) Voir *J. E.* 1888, p. 279. La question a été posée (ibid. p. 257) de savoir comment distinguer entre eux les deux systèmes. Comme AC_1 a, sur BC_1 la priorité alphabétique, le système x', y', z' peut être appelé de *première espèce*, ou *primaire*. L'autre sera appelée *secondaire*. Nous n'employons pas les mots *direct* ou *rétrograde*, parce que, lorsque C_1 passe sur le prolongement de BA, x' devient négatif et rétrograde. On ne peut donc, sans confusion d'idées, qualifier cette grandeur de directe.

on a

(4) $$ax' + by' + cz' = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} \text{ (*)}$$

(5) $$= 2S \operatorname{cotg} \omega$$

(6) $$= 4R^2\Delta;$$

relation qui se rapproche beaucoup de celle des coordonnées trilinéaires.

3. — De (6), on tire

(7) $$\frac{ax' + by' + cz'}{4R^2\Delta} = 1.$$

Cette relation peut servir à rendre homogène toute fonction algébrique de x', y', z'. Il suffit de multiplier certains termes par une puissance convenable du premier membre.

4. — Si l'on applique cette formule (4) à deux points M_0, M_1 et qu'on retranche membre à membre, les égalités obtenues, on trouve

(8) $$\Sigma a(x'_1 - x'_0) = 0.$$

5. Théorème I (Principe de la réciprocité entre les coordonnées.). — *Si l'on fait tourner, de* $-\frac{\pi}{2}$, *le triangle de référence ou un de ses homothétiques directs autour d'un point quelconque* D*: 1° les nouvelles coordonnées trilinéaires* X, Y, Z, *sont égales, à une constante près, aux anciennes coordonnées sous-trilinéaires* x', y', z'*; 2° si la rotation est de* $+\frac{\pi}{2}$, *il faut de plus changer les signes; 3° ce sont les énoncés inverses, s'il s'agit des anciennes coordonnées trilinéaires; 4° le théorème s'étend aux polygones de référence.*

Pour démontrer la première partie, il suffit d'observer que les deux longueurs ont des origines fixes, qu'elles sont situées sur des parallèles, et que leurs directions positives sont les mêmes. On démontre d'une manière analogue le reste du théorème.

6. Corollaires. — 1° *Quand on connaît, en coordonnées trilinéaires (ou barycentriques), une formule, ou l'équation d'une*

(*) Cette formule (3) a été donnée par M. Lemoine (*J. E.* 1883. p. 218). Voir plus loin (6, 3°) une autre démonstration.

ligne, on peut l'écrire immédiatement en coordonnées sous-trilinéaires. Car il suffit d'écrire la première formule en prenant le nouveau triangle, $\alpha\beta\gamma$, pour triangle de référence; puis d'appliquer le théorème. On peut ensuite rendre le résultat homogène (**3**).

2° En particulier, *la distance* M_0M_1 *de deux points a les mêmes formules en trilinéaires et en sous-trilinéaires, quand, dans le premier de ces systèmes, elle ne dépend que des différences de coordonnées* $X_1 - X_0$,... Car si on applique le théorème, les constantes disparaissent dans ces différences et celles-ci sont remplacées par $x'_1 - x'_0$,...

3° Il y a un énoncé analogue pour d'autres relations qui ne dépendent seulement des différences $X_1 - X_0$. Exemple : on peut établir ainsi la relation fondamentale (4). Car on a l'égalité analogue à (8) en coordonnées trilinéaires. On en déduit (8) par le principe de réciprocité; et, de là, l'égalité (4), en faisant coïncider M_0 avec A.

4° Si l'on veut que les trois constantes soient nulles dans la première partie du théorème, il suffit d'obtenir $\alpha\beta\gamma$ en menant une perpendiculaire à chaque côté, tel que AB, par sa première extrémité A. Les deux triangles ont alors pour centre de rotation D le premier point de Brocard Ω_1. Ce point étant le point double du système, le triangle $\Omega_1\alpha A$, où entrent les deux rayons vecteurs $\Omega_1\alpha$, $\Omega_1 A$, renferme l'angle ω en α (comme une infinité des triangles semblables à ABC, circonscrits ou inscrits). Puisque ce triangle est rectangle, le rapport de similitude est cotg ω. De là on conclut immédiatement (5), par le principe de réciprocité (*).

7. — Pour passer du système x, y, z à x', y', z', les formules de transformation sont

(*) Si jamais on trouvait utile de donner un nom à ce triangle remarquable, on pourrait prendre celui de *circumrectique* qui rappelle la direction de ses côtés et la propriété qu'il possède d'être circonscrit à ABC. Il y a un second triangle analogue $\alpha'\beta'\gamma'$, qui est la figure inverse du premier. La valeur du rapport de similitude est la même. Donc les deux triangles sont égaux, et la figure $\Omega_1\alpha\Omega_2\alpha'$ est un parallélogramme. Par suite, le centre de rotation des deux triangles $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$ est le milieu de $\Omega_1\Omega_2$. — Il suffit de construire le côté $\alpha\beta$ pour obtenir graphiquement a cotg ω, c'est-à-dire $a\Sigma$ cotg A et en déduire l'angle de Brocard.

(9) $x' \sin B = x \cos B + z$;

et, pour le problème inverse,

(10) $x \sin B = -x' \cos B - z' + c.$

ou

(11) $\Delta x = x' \sin B \cos A \cos C + y' \sin C - z' \sin A \cos C.$

On établit (9) et (10) en projetant sur C_1M et C_1B le périmètre du quadrilatère birectangle MA_1BC_1. (11) s'obtient en résolvant le système des trois équations du groupe (9).

8. — Proposons-nous de calculer la distance $\delta \equiv M_0M_1$ de deux points, dans le système sous-linéaire. *Cette longueur présente la particularité de pouvoir être exprimée d'un infinité de manières différentes, en fonction des mêmes données.* Cela tient à ce que : elle égale une suite de rapports égaux qu'on peut transformer ; 2° deux des trois couples de données suffisent à la déterminer. Nous nous appuierons sur le théorème que nous allons établir dans le paragraphe suivant.

(A suivre.)

ESSAI

SUR LA

GÉOMÉTRIE DE LA RÈGLE ET DE L'ÉQUERRE

(SECONDE PARTIE)

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite*, voir p. 222.)

---

136. Hauteurs et vitesses des étoiles filantes. — On distingue, dans une étoile filante, les points d'*apparition* et de *disparition* ; mais ces points seraient difficiles à observer, la traînée lumineuse s'évanouissant instantanément, si l'on ne prenait la précaution de noter les étoiles qui se trouvent dans leur voisinage, au moment de l'expérience. Cette remarque nécessaire étant faite, voici comment pourraient être dirigées les expériences ayant pour but la détermination de la hauteur des étoiles filantes.

Imaginons deux observateurs placés en A, B; la distance AB doit être considérable relativement à celles dont nous avons parlé jusqu'ici (*) et les deux postes d'observation A, B, sont reliés par un fil télégraphique ou téléphonique. A un moment donné, les observateurs remarquent le point d'apparition α d'une étoile filante, ou, pour mieux dire, ils notent : l'un, une étoile ε, dans la direction $A\alpha$; l'autre une étoile ε', dans la direction $B\alpha$. De cette observation, on peut conclure la distance de l'étoile filante à la terre, comme nous allons l'expliquer.

Soit O le centre de la Terre; $O\alpha$ rencontre la surface de la Terre en un point C; nous poserons $C\alpha = x$: c'est la hauteur cherchée.

Posons aussi :

$$A\alpha = h, \quad B\alpha = h',$$
$$\text{corde } AB = d,$$
$$OA = OB = OC = R,$$
$$zA\alpha = \theta,$$
$$z'B\alpha = \theta', \quad A\alpha B = \varphi.$$

Les triangles αAO, αBO, donnent

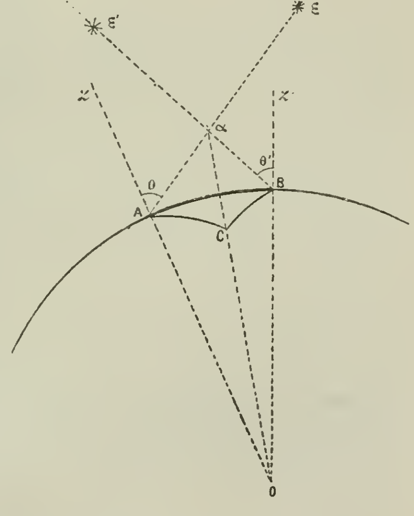
(A) $(R+x)^2 = h^2 + R^2 + 2Rh\cos\theta = h'^2 + R^2 + 2h'R\cos\theta'$.

Ces égalités donnent

(1) $h^2 = 2Rh\cos\theta = h'^2 + 2h'R\cos\theta'$.

D'ailleurs, le triangle $A\alpha B$ donne

(2) $d^2 = h^2 + h'^2 - 2hh'\cos\varphi$.



L'angle φ peut être fourni par l'observation ; c'est la hauteur apparente des étoiles ε, ε', en A ou en B. Les formules (1), (2) permettraient donc de calculer h, h', si la résolution de ces équations était possible. Mais on voit que ce calcul conduirait à une équation du quatrième degré, non quadratique (**), et la difficulté algébrique, ici rencontrée, paraît insurmontable. Voici comment on peut la tourner.

L'arc AB, bien qu'assez considérable, peut, dans des observations de la nature de celles que nous décrivons ici, être assimilé à une ligne

(*) Dans les expériences qui furent faites en 1856 par MM. Besse-Bergier, Liais, Chacornac et Goujon, les deux postes d'observation étaient Orléans et Paris. (Voyez *Les étoiles filantes et les bolides*, par M. Félix Hément; Gauthier-Villars, éditeur, 1858, p. 19.)

(**) Nous entendons, par là, que l'équation n'est pas décomposable, rationnellement, en équations du second degré.

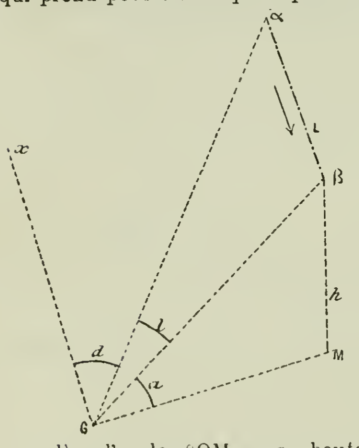
droite. On connaît, au point A, la direction de AB, et l'on peut relever l'angle εAB. Nous considérons donc les angles $\varepsilon AB = \lambda$, $\varepsilon' BA = \lambda'$, comme des quantités connues, données par l'observation. Nous avons

$$(3) \qquad \frac{h}{h'} = \frac{\sin \lambda'}{\sin \lambda}.$$

Nous n'avons plus alors à tenir compte de l'égalité (2), et nous considérons h, h' comme déterminées par les équations (1), (3). Abstraction faite de la solution évidente, et non admissible, $h = h' = 0$, ces équations admettent une seule solution; par suite, h, h' sont bien déterminées.

Après avoir calculé h et h', les formules (A) feront connaître l'inconnue principale x; le calcul, comme on le voit, pourra se faire au moyen de deux égalités; on aura, de la sorte, une vérification du calcul effectué et des observations qu'on a faites.

Quant à la vitesse des étoiles filantes, elle s'obtient par une formule qui prend pour base le principe du *Radiant*.



On sait que, pour une observation suffisamment courte, celle d'une nuit par exemple, toutes les étoiles filantes semblent partir d'un certain nombre de points uniques, bien déterminés, sur la voûte céleste, nommés *points radiants*, ou, plus brièvement, *radiants* (*).

Soient : α, le point d'apparition d'une étoile filante; β, le point de disparition. A cette étoile, correspond un point radiant situé dans une direction ox, parallèle à la trajectoire $\alpha\beta$. L'observateur, placé en O, relève les angles

$$xO\alpha = d, \qquad \alpha O\beta = l.$$

On calcule, en kilomètres, la hauteur h de l'étoile au-dessus de l'hozon correspondant à O ; enfin, on relève l'angle $\beta OM = a$, hauteur apparente de l'étoile filante, au moment de sa disparition, au-dessus de l'horizon considéré.

On a, en posant $\alpha\beta = L$,

$$\frac{L}{\sin l} = \frac{O\beta}{\sin d}.$$

Mais

$$O\beta = \frac{h}{\sin a}.$$

(*) Voyez *Annuaire publié par le bureau des longitudes*, pour l'an 1888, p. 121. Le nombre des points radiants, connus avec une certaine approximation, est égal à 63. « L'observation de ce phénomène, dit l'ouvrage en question, offre à plusieurs égards un haut intérêt scientifique, surtout depuis l'époque où les travaux de plusieurs de nos astronomes célèbres ont permis de constater d'une manière indubitable que certains essaims de météores et certaines comètes effectuent leur mouvement autour du Soleil sur une même trajectoire. »

Donc $$L = \frac{h \sin l}{\sin a \sin d}.$$

Connaissant la longueur (*) de $\alpha\beta$ et la durée θ de la traînée lumineuse, on en déduit la vitesse du météore (**).

(A suivre.)

VARIÉTÉS

CRELLE ou BROCARD?

Dans le dernier numéro du Journal de M. Hoffmann : *Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht* on trouve sous le titre CRELLE ou BROCARD, un article de M. Schlömilch. Étant donnée la forme injurieuse de cette note, il me paraît plus convenable de ne pas le reproduire ici. Je crois pourtant nécessaire d'y répondre, au moins brièvement, dans ce *Journal de Mathématiques élémentaires,* où a été publiée autrefois (***) la première étude, faite en France, sur le cercle de Brocard.

Voici, en peu de mots, le résumé de l'article auquel je fais allusion. L'auteur, après avoir cité les travaux de Crelle et de Jacobi sur la Géométrie du triangle, s'élève contre l'attribution du nom de Brocard à l'angle et aux deux points connus maintenant sous ce nom, et il revendique pour le géomètre allemand, Crelle, qui, entre parenthèses, n'avait pas absolument besoin de ce nouveau titre de gloire, la priorité de la formule fondamentale :

$$\cot \omega = \cot A + \cot B + \cot C.$$

(*) On suppose que la trajectoire, pendant le court intervalle de temps qui s'écoule entre les deux observations de points α, β, est rectiligne; cette hypothèse est tout à fait justifiée.

(**) D'après les résultats consignés dans l'ouvrage de M. Hément, cité plus haut, la vitesse des étoiles filantes varie, suivant les exemples, entre 22 et 113^{km} par seconde; les hauteurs du point d'apparition, entre 31 et 119^{km}; celles du point de disparition, entre 5 et 66^{km}.

(***) Voir *Journal* 1883, p. 10.

En outre, il proteste contre l'habitude de donner des noms nouveaux à des théorèmes qui peuvent (il le fait observer, mais la remarque est vraiment superflue) *se fabriquer* en nombre indéfini. Il voit dans l'usage de ces dénominations nouvelles un inconvénient, celui de faire oublier les noms, quelquefois illustres, des savants qui autrefois ont fait des découvertes se rattachant aux mêmes sujets.

M. Schlömilch me permettra, en lui répondant, de ne pas le suivre sur le terrain où il a cru devoir se placer. Ce sont là des procédés de discussion que nous, Français, M. Schlömilch ne l'ignore pas sans doute, nous n'employons jamais. Je veux me borner à traiter, sans passion, avec le seul souci de la vérité, le point historique soulevé par l'auteur de l'article cité et, comme on le verra, ce n'est pas aux Français que j'irai puiser les renseignements dont la source pourrait paraître suspecte au géomètre allemand, mais bien aux travaux des mathématiciens étrangers, à ceux, notamment, de MM. Casey et Neuberg.

Avant d'entrer en matière, je dois rappeler aux lecteurs du *Journal de Mathématiques* qui ne pourraient pas consulter les sources originales, les nombreux articles publiés ici même sur la Géométrie du triangle, en tête desquels se placent les *Généralités sur la géométrie du triangle* par M. de Longchamps et l'*Étude bibliographique* de M. Vigarié. On trouvera, en groupant les notes diverses qui accompagnent ces mémoires, un historique très développé et absolument impartial de la géométrie récente.

Une autre étude bibliographique a été donnée, antérieurement, en 1885, par M. Lemoine, au Congrès de Grenoble, de l'Association française.

Chacun sait la part considérable que M. Lemoine a prise à la Géométrie du triangle; il semblerait donc que l'article auquel nous faisons allusion n'aurait pas du échapper à M. Schlömilch, que ces questions d'histoire paraissent intéresser particulièrement. Or, avant de citer les travaux si nombreux qui se sont suivis sans interruption depuis 1873, M. Lemoine donne une liste des mémoires divers remontant à 1809. Il est vrai que, dans cette nomenclature, le travail de

Crelle a échappé à M. Lemoine. L'auteur de cette notice n'avait pas, à cette date, consulté la collection, fort rare, du *Journal de Crelle*, et rien, à propos de cet article oublié, ne pouvait le mettre sur sa trace. Comme il le déclare d'ailleurs, certains travaux ont dû rester ignorés de lui. Mais M. Schlömilch connaît-il quelqu'un, même en Allemagne, qui, sur une question donnée, puisse affirmer qu'il possède sans erreur, sans omission, tous les éléments historiques qu'elle comporte?

Quoi qu'il en soit, et n'en déplaise à M. Schlömilch, les Allemands eux-mêmes ont adopté le terme critiqué par lui avec tant de passion. Que ce géomètre, s'il lui en faut une preuve de fraîche date, veuille bien se reporter au mémoire de M. Emmerich, publié en mars 1889. Dans cette note (*), M. Emmerich rappelle, avec raison, le travail de Crelle. Et pourtant, de même que M. Fuhrmann. en 1887, M. Emmerich conserve le nom d'angle de Brocard; et il rend justice, en même temps, aux géomètres anciens et aux géomètres modernes en disant :

« On ne peut oublier, que les écrits de Crelle et de Jacobi, avec les travaux de Grunert, Wiegand, Emsmann et Hellwig qui s'y rattachent, constituent, par la foule des résultats qu'ils renferment, une première période de la géométrie récente, tandis que la période actuelle emprunte un attrait particulier aux cercles de Brocard et de Lemoine. »

Il importe d'ajouter, pour nous laver de ce reproche de vanité que M. Schlömilch nous jette si gratuitement au visage, que les noms des géomètres français, attribués à quelques-unes de leurs découvertes, ont été adoptés, à ce titre, sur la proposition des géomètres étrangers. C'est M. Neuberg, notamment, qui, le premier, a proposé les mots : *points*, *angle et cercle de Brocard*. Les noms de : premier et second triangle de Brocard, sont dus à M. Casey. Miss Scott, si grossièrement et si injustement mise en cause par M. Schlömilch, a simplement dénommé premier et deuxième points de Brocard, ce que certains auteurs appellent aussi le point direct et le point rétrograde. Or toutes ces expressions paraissent naturelles si l'on

(*) « Sur l'angle de Brocard », par M. Emmerich, professeur, à Mulheim-sur-Ruhr (Prusse).

veut bien considérer que les points et l'angle dont il s'agit se rattachent étroitement au cercle dont la découverte est, sans contestation, M. Schlömilch l'accordera lui même, la propriété de M. Brocard.

Je dois dire enfin que l'enthousiasme provoqué en France, en Angleterre, en Belgique, et en Allemagne même, par le développement de la géométrie récente, n'a nullement eu pour conséquence, malgré la part considérable qui revient dans ce mouvement à M. Brocard, de qualifier, comme nous le reproche encore M. Schlömilch, de Géométrie Brocardienne, la géométrie du triangle. Si ce terme a été, à de rares occasions, employé dans ce Journal, et ailleurs, c'est sans prétention et uniquement pour indiquer la nature des sujets traités.

Quant à l'art de fabriquer des points remarquables, art que M. Schlömilch croit nous revéler dans l'article cité, qu'il me permette de le renvoyer au travail, déjà cité, *Généralités sur la Géométrie du triangle,* qui a paru ici même en 1886, et dans lequel, par des procédés divers et mille fois plus élégants que celui de M. Schlömilch, M. de Longchamps a montré comment il était possible de passer, d'un point donné, à d'autres points remarquables du triangle, associés à celui-ci; et même, comment on pouvait trouver un nombre indéfini de pareils points.

Pour conclure, si nous reconnaissons, ainsi que tous les géomètres français l'on fait, dès qu'ils en ont eu connaissance, que la formule citée au début de cet article doit être, jusqu'à nouvel ordre, attribuée à Crelle, on ne peut refuser que les propriétés qui s'y rattachent aient été mises en évidence pour la première fois par le travail de Brocard? D'ailleurs, n'est-il pas exact, et n'est-ce pas là le fond même du débat, que ce travail fût, avec celui que M. Lemoine présenta en 1873 au Congrès de Lyon, l'origine de la géométrie du triangle?

Si tout cela est vrai, n'est-il pas de toute justice de conserver les dénominations attribuées, dans les mémoires publiés en France et à l'étranger, aux éléments que ces travaux ont mis en lumière?

Que M. Schlömilch me permette une dernière réflexion.

Ne trouve-t-il pas, en mettant de côté certains sentiments qui vraiment n'ont rien à démêler avec les intérêts scienti-

fiques, qu'il est un peu tard aujourd'hui pour revenir, en admettant que la chose fût justifiée en principe, sur un langage aussi généralement adopté? M. Schlömilch, si fort au courant de la littérature allemande et non moins, je suppose, de la littérature française, aurait bien dû, depuis longtemps, pourvoir à notre ignorance en nous avertissant, à temps, de nos méprises. Je me demande pourquoi il n'a pas crû devoir le faire. Mais, peut-être, la note de Crelle, aujourd'hui remise en lumière par les Français eux-mêmes, était-elle à cette époque et malgré toute l'érudition qu'il peut posséder, aussi parfaitement inconnue de M. Schlömilch, que de nous?

A. Morel.

Depuis que cet article est écrit, M. Vigarié m'a communiqué le manuscrit du mémoire qu'il a présenté cette année à l'Association française, au Congrès de Paris. Ce mémoire qui donne un historique très complet de la géométrie du triangle, a été lu dans la séance du 9 août dernier, antérieurement, comme l'on voit, à la publication de l'article de M. Schlömilch. Dans ce travail, M. Vigarié rappelle notamment la part de Crelle et des autres savants allemands dans la géométrie du triangle et il complète ainsi la notice historique donnée en 1885 par M. Lemoine. M. Schlömilch, en lisant ce mémoire, pourra constater que l'ignorance des Français, au sujet de la littérature allemande, n'est pas aussi absolue qu'il lui plaît de l'affirmer. A. M.

QUESTIONS D'EXAMENS (*)

34. — Trouver les angles d'un triangle, sachant qu'ils sont proportionnels aux nombres 2, 3, 4.

(*) Ces énoncés sont empruntés aux recueils publiés par la librairie Croville-Morant, 20, rue de la Sorbonne.

Les pages citées renvoient à cette publication.

On trouve à la p. 10, citée ci-dessous, la question suivante : *trouver*

Vérifier que, dans ce triangle, on a la relation :

$$\cos\frac{A}{2} = \frac{a+c}{2b}.$$

(*Saint-Cyr*, p. 10.)

Les angles demandés sont : $A = 40°$, $B = 60°$, $C = 80°$.
Dans tout triangle, on a

$$\frac{a+c}{2b} = \frac{\sin A + \sin C}{2\sin B} = \frac{\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}}{2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}},$$

d'où

$$\frac{+c}{2b} = \frac{\cos\frac{A-C}{2}}{2\sin\frac{B}{2}}.$$

Dans le cas présent, on a :

$$\frac{A}{2} = 20° = \frac{C-A}{2}, \quad \sin\frac{B}{2} = \sin 30° = \frac{1}{2}, \text{ etc...}$$

35. — Démontrer que, n désignant un entier impair, $n^5 - n$ est divisible par 48.

(*Id.*)

Le nombre proposé étant écrit sous la forme

$$n(n-1)(n+1)(n^2+1),$$

est manifestement divisible par 3. Il reste à montrer qu'il est divisible par 16.

Ayant posé $n = \mathfrak{M}4 \pm 1$,
et prenant d'abord le signe $+$, on voit que : 1° $n - 1$ est divisible par 4; 2° $n + 1$, par 2; 3° $n^2 + 1$ par 2; donc etc...

36. — Construire une parabole, connaissant la directrice D, une tangente Δ, et le paramètre p.

(*Saint-Cyr*, p. 13.)

On mène une parallèle D′, à D, à la distance $\frac{p}{2}$.

D′ rencontre Δ. en A. La perpendiculaire élevée, en ce point A, à D′, va passer par le foyer. On a d'ailleurs un autre lieu du foyer en prenant le symétrique de D, par rapport à D′.

La directrice étant donnée, le foyer étant connu, la parabole est déterminée.

Il y a deux solutions, parce que la droite peut être prise d'un côté, ou de l'autre, de D.

---

deux nombres connaissant la somme de leurs carrés et la somme de leurs cubes.

Cette question ne comporte pas de solution élémentaire. Il faut lire probablement, somme de deux nombres, au lieu de *somme de leurs carrés*.

37. — Démontrer que

$$(1) \cos a \cos b = \frac{1}{4}\{\cos(a+b) + \cos(a-b) + \cos(-a+b) + \cos(-a-b)\}$$

et, généralement

$$(2) \cos a \cos b \ldots \cos l = \frac{1}{2^n} \Sigma \cos(\pm a \pm b \pm c \ldots \pm l)$$

n désignant le nombre des lettres $a, b, \ldots l$.

(*École navale*, p. 25.)

La formule connue donne
$2 \cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a+b) = \cos(-a+b) + \cos(-a-b$
égalité d'où l'on déduit (1)

En multipliant las deux membres de (1) par $\cos c$, on a

$$\cos a \cos b \cos c = \frac{1}{8}\{2 \cos(a+b) \cos c + \ldots\} = \frac{1}{8} \sum \cos(\pm a \pm b \pm c)$$

etc.

Si dans la formule (2) on suppose $b = c = \ldots = l = a$, on a

$$2^m \cos^m a = \Sigma \cos(\pm a \pm a \ldots \pm a).$$

Le second membre, développé, est une fonction linéaire des quantités $\cos ma.\ \cos(m-1)a, \ldots$ On pourra résoudre l'égalité par rapport à $\cos ma$. On voit ainsi que $\cos ma$, quel que soit m, est une fonction rationnelle de $\cos a$, si la proposition est vraie pour les puissances $(m-1), (m-2)$, Or la propriété est vraie pour $\cos 2a$: elle est donc générale.

CORRESPONDANCE

Nous avons reçu de M. Lemoine la lettre suivante :

Dans le numéro d'août 1889 du *J. E.*, M. Pomey donne une démonstration très simple du théorème de Pagès. La remarque qui termine cette petite note et qui indique la préoccupation *didactique* de l'auteur m'engage à vous rappeler la démonstration que j'ai donnée du même théorème, *J. E.* 1884, page 100, et que j'avais mise là, précisément parce qu'elle s'appuyait sur des considérations très élémentaires de géométrie pure. Elle est simple, facile à retenir et elle me paraît naturelle. Vous observerez même qu'il n'est pas nécessaire de considérer l'ellipse. On peut, en effet, énoncer la proposition de la manière suivante:

Soit F'MF *un triangle,* M' *le pied sur* FF' *de la bissectrice de l'angle* F'MF, *la projection de* MM' *sur l'un des côtés* MF MF' *est égale à*

$$\frac{(MF + MF')^2 - \overline{FF'}^2}{FF'};$$

La démonstration de cette propriété constitue un exercice sur le troisième livre. J'ignorais que ce théorème classique portât le nom de E. Pagès. Si vous savez quelque chose de ce géomètre, je crois que beaucoup de lecteurs, moi entre autres, prendraient plaisir à voir sur lui un petit paragraphe biographique.

Pour satisfaire au désir manifesté par M. Lemoine, je me suis adressé à M. Catalan, qui, je croyais le savoir, avait particulièrement connu Etienne Pagès.

M. Catalan en me répondant, me dit qu'il a connu, en effet, Etienne Pagès, il y a une cinquantaine d'années. Etienne Pagès est entré à l'École Polytechnique en 1829; sorti en 1832 dans l'artillerie de terre, il donna sa démission en 1833. Vers 1837 ou 1838 il remplaça Duhamel comme *Directeur des études à l'école préparatoire de Sainte-Barbe;* mais il succomba, peu de temps après, en 1838 ou 1839, à une phtisie pulmonaire. D'après la lettre de M. Catalan, à laquelle nous empruntons ces renseignements, Etienne Pagès n'aurait produit qu'un seul travail, publié en 1837 dans le *Journal de Liouville.* G. L.

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES COMPLET

SESSION D'AVRIL 1889 (*)

ACADÉMIE D'AIX (Faculté de Marseille).

1re série. — Inscrire dans un cercle un rectangle de surface donnée. — Discussion.

2e série. — Dans un plan, on donne une droite fixe HK et un point fixe O dont la distance HK est égale à a.

Autour du point O tourne une droite AOB dont le segment AO est égal à $\frac{a}{2}$ et dont le segment OB est égal à a.

On calculera pour chaque angle α que fait AB avec HK la somme

$$\overline{AA'}^2 + \overline{BB'}^2$$

des carrés des distances des points A et B à la droite HK.

(*) Pour les solutions, voyez les *Nouvelles annales scientifiques* (librairie Croville-Morant).

On cherchera les valeurs maxima et minima de cette somme et enfin on tâchera de représenter par une courbe la variation de cette somme lorsque la droite AB tourne autour du point O.

3e série. Couper une sphère par deux plans parallèles, perpendiculaires à un diamètre donné, également éloignés du centre de manière que la somme des deux sections soit à la zone intermédiaire dans un rapport donné. Cas où le rapport donné est égal à l'unité.

ACADÉMIE D'ALGER

I. Évaluer le volume engendré par un triangle tournant autour de l'un de ses côtés. Exprimer ce volume en fonction des côtés seulement. Démontrer que ce volume est égal au produit de la surface de ce triangle multipliée par la circonférence décrite par son centre de gravité. – Autour de quel côté il faut faire tourner le triangle pour qu'il engendre le plus grand volume?

II. — Deux points A et B sont situés sur un même parallèle terrestre ; l'arc AB de ce ce parallèle a une longueur de 100 kilomètres, et l'heure en B en avance de quatre minutes sur l'heure en A. On demande de calculer la latitude commune de ces deux points.

ACADÉMIE DE BORDEAUX

1re série. — I. Partager un triangle équilatéral ABC en deux parties de surfaces équivalentes par une sécante DF faisant avec la base BC un angle α; chercher la condition que doit remplir l'angle α pour que les points D et F soient d'un même côté de la base BC. Vérifier les formules dans le cas où $\alpha = 30^\circ$.

II. — Résoudre le système $x + y = a$;

$$\sqrt{2a^2 - x^2} + \sqrt{a^2 - y^2} = a\sqrt{3}.$$

2e série. I. — Étant donnés quatre points en ligne droite A, B, C, D; on mène, par un point P, quelconque, du plan, les circonférences PAB et PCD qui se coupent en général en un second point P'.

1° Démontrer que la droite PP' passe par un point fixe, quelque soit le point P choisi.

2° Déterminer dans le plan le lieu des points P tels que les circonférences PAB et PCD soient tangentes entre elles.

II. — Déterminer la relation qui existe entre les coefficients de l'équation $x^3 + ax + b = 0$, sachant que la somme des cubes des racines est égale à leur produit.

QUESTION 282

Solution par M. **A. Boutin**, professeur au Collège de Courdemanche.

Étant donné deux triangles quelconques ABC, A'B'C' ; *on construit sur une même base* MN : *d'abord, les couples de triangles* MNP' MNP', *semblables à* ABC, A'B'C'; *ensuite, les couples* MNQ,

MNQ′ *semblables à* BCA, B′C′A′; *enfin, les couples* MNR, MNR′ *semblables à* CAB. C′A′B′.

Démontrer que les droites PP′, QQ′, RR′ *sont inversement proportionnelles aux produits* AB.A′B′, BC.B′C′, CA.C′A′.

(Neuberg.)

Soient A, B, C, a, b, c, S, A′, B′, C′, a', b', c', S′ les divers éléments des triangles ABC. A′B′C′; m = MN.

$\widehat{PMN} = B$, $\widehat{P'MN} = B'$, $\widehat{PNM} = C$, $\widehat{P'NM} = C'$

On a $PM = \dfrac{mc'}{a}$, $P'M = \dfrac{mc'}{a'}$,

$PN = \dfrac{mb}{a}$, $P'N = \dfrac{mb'}{a'}$.

Les triangles PMP′, PNP′ donnent ;

$$PP'^2 = \frac{m^2c^2}{a^2} + \frac{m^2c'^2}{a'^2} - \frac{2m^2cc'}{aa'}\cos(B - B'),$$

$$PP'^2 = \frac{m^2b^2}{a^2} + \frac{m^2b'^2}{a'^2} - \frac{2m^2bb'}{aa'}\cos(C - C').$$

Ajoutant, chassant les dénominateurs, divisant par m^2; on a

$$\frac{2PP'^2.a^2a'^2}{m^2} = a'^2(b^2 + c^2) + a^2(b'^2 + c'^2) - 2aa'cc'\cos(B - B')$$
$$- 2aa'bb'\cos(C - C')$$
$$= a'^2(b^2 + c^2) + a^2(b'^2 + c'^2) - \frac{1}{2}\cdot 2ac\cos B.2a'c'$$
$$\cos B' - \frac{1}{2}2ab\cos C.2a'b'\cos C' - 2.ac\sin B.$$
$$a'c'\sin B' - 2ab\sin C.a'b'\sin C'$$
$$= a'^2(b^2 + c^2) + a^2(b'^2 + c'^2) - \frac{1}{2}(a^2 + c^2 - b^2)$$
$$(a'^2 + c'^2 - b'^2) - \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2)(a'^2 + b'^2 - c'^2)$$
$$- 16SS'$$
$$= (a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2) - 2(a^2a'^2 + b^2b'^2$$
$$+ c^2c'^2) - 16SS'.$$

Le second membre étant une fonction symétrique des lettres, a, b, c; a', b', c' on a, finalement,

$$PP'.aa' = QQ'.bb' = RR'.cc'.$$

Solution géométrique (*). — Les triangles PNP′, QMQ′ sont semblables. En effet, les angles PNP′, QMQ′ sont égaux ; et, de plus, les côtés qui les comprennent sont proportionnels, comme le prouvent les égalités :

$$\mathrm{PN} = \frac{mb}{a}, \qquad \mathrm{P'N'} = \frac{mb'}{a'};$$

$$\mathrm{QM} = \frac{ma}{b}, \qquad \mathrm{Q'M'} = \frac{ma'}{b'}.$$

De ces relations, on déduit

$$\frac{\mathrm{PN}}{\mathrm{Q'M'}} = \frac{\mathrm{P'N'}}{\mathrm{QM}} = \frac{bb'}{aa'},$$

et, par suite,

$$\frac{\mathrm{PP'}}{\mathrm{QQ'}} = \frac{\mathrm{PN}}{\mathrm{Q'M}} = \frac{bb'}{aa'},$$

$$\mathrm{PP'}.aa' = \mathrm{QQ'}.bb' = \mathrm{RR'}.cc'.$$

QUESTION 290

Solution et Remarque, par M. Sludler, chargé de cours au Lycée de Rodez.

Résoudre l'équation

$$(\alpha x + \beta)^3 + (\alpha' x + \beta')^3 + x^3 = 3(\alpha x + \beta)(\alpha' x + \beta')\, x,$$

Déduire de là, en supposant $\alpha = \alpha' = 0$ une méthode élémentaire pour résoudre l'équation du troisième degré. (G. L.)

1° L'équation proposée peut s'écrire :

(1) $x^3 = -(\alpha x + \beta)^3 - (\alpha' x + \beta')^3 + 3(\alpha x + \beta)(\alpha' x + \beta')x.$

Si nous posons

$$y = (\alpha x + \beta) + (\alpha' x + \beta'),$$

d'où

(2) $y^3 = (\alpha x + \beta)^3 + (\alpha' x + \beta')^3 + 3(\alpha x + \beta)(\alpha' x + \beta')y,$

et si nous ajoutons membre à membre les relations (1) et (2), nous obtenons

(*) Communiquée par M. J. Neuberg.

$$y^3 + x^3 - 3(\alpha x + \beta)(\alpha' x + \beta')(y + x) = 0,$$

d'où la solution $$y = -x$$

ou $$\alpha x + \beta + \alpha' x + \beta' + x = 0$$

et, par suite, $$x = -\frac{\beta + \beta'}{\alpha + \alpha' + 1}.$$

2° Si dans ce calcul nous supposons $\alpha = \alpha' = 0$ nous voyons que l'équation réduite

(3) $$x^3 - 3\beta\beta' x + \beta^3 + \beta'^3 = 0$$

admet la racine $$x = -(\beta + \beta').$$

Si ensuite nous identifions, terme à terme, l'équation (3) et l'équation générale du troisième degré :

$$x^3 + px + q = 0,$$

nous obtenons, pour déterminer β et β', les deux équations suivantes

$$\beta\beta' = -\frac{p}{3}, \qquad \beta^3 + \beta'^3 = q, \qquad \text{etc...}$$

Remarque. — Il n'est pas sans intérêt d'observer que l'énoncé de cette question fournit à l'enseignement élémentaire une méthode uniforme de résolution des équations du deuxième et du troisième degré.

On sait en effet que l'un des moyens employés pour résoudre l'équation

$$x^2 + px + q = 0,$$

consiste à transformer le premier membre en un carré d'un binôme de la forme $x - \alpha$; on extrait ensuite la racine carrée des deux membres de l'équation ainsi transformée.

Or, si l'on examine de près la méthode de résolution que l'énoncé indique pour l'équation du troisième degré, on s'aperçoit que ce procédé revient à transformer en un cube exact l'un des deux membres de l'équation et à extraire ensuite la racine cubique des deux membres.

En effet, toute équation du troisième degré est réductible à la forme

(a) $$x^3 = -px - q,$$

et il résulte immédiatement de cette relation que l'ensemble des deux termes $-px - q$ est un cube parfait dont la racine est x. D'autre part, l'inconnue x peut être considérée, d'une

infinité de manières, comme la somme de deux quantités auxiliaires $\beta + \beta'$, de sorte que l'équation (a) est un cas particulier de l'identité

(b) $$(\beta + \beta')^3 = 3\beta\beta'(\beta + \beta') + \beta^3 + \beta'^3.$$

En identifiant, terme à terme, les relations (a) et (b), on obtient pour déterminer x les trois équations

$$x = \beta + \beta',$$

$$\beta\beta' = -\frac{p}{3}, \qquad \beta^3 + \beta'^3 = -q.$$

Nota. — Solutions diverses par MM. H. Youssoufian, à Constantinople; I. Beyens, capitaine du Génie à Cadix ; A. Emmerich à Mülheim sur Ruhr (Prusse); Lavieuville, professeur au collège de Dieppe; Boutin, professeur au collège de Courdemanche.

QUESTIONS PROPOSÉES

342. — Si l'on a

$$f + g + h = 1,$$

l'égalité

$$abc\left\{\frac{f}{a^2} + \frac{g}{b^2} + \frac{h}{c^2} - \left(\frac{f}{a} + \frac{g}{b} + \frac{h}{c}\right)^2\right\} \sum \frac{a(b-c)^2}{f}$$
$$= \left\{(af + bg + ch)\left(\frac{f}{a} + \frac{g}{b} + \frac{h}{c}\right) - 1\right\} \sum \frac{a^2(b-c)^2}{f}$$

est une identité. *(Catalan.)*

343. — Résoudre les équations

$$x + y + z = a,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + 2b^2,$$
$$x^3 + y^3 + z^3 = a^3.$$

(Svéchnikoff.)

344. — Soient A le sommet d'un tétraèdre, BCD sa base, G le point d'intersection des médianes du triangle BCD. Démontrer que

$$3\overline{AB}^2 + 3\overline{AC}^2 + 3\overline{AD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2 + 9\overline{AG}^2.$$

(Svéchnikoff.)

345. — Résoudre les équations

$$x + y + z + t = 4m,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 4m^2 + 4q^2,$$
$$x^3 + y^3 + y^3 + t^3 = 4m^3 + 16mq^2,$$
$$x^4 + y^4 + z^4 + t^4 = 4m^4 + 24m^2q^2 + 4q^4 + 4p^4.$$

(Svéchnikoff.)

346. — Sur le diamètre AA′ d'un cercle donné, on construit un rectangle AA′CC′ ayant pour hauteur le côté du carré inscrit; on prend, sur la circonférence, un point quelconque M; et l'on tire les lignes MC, MC′ qui coupent AA′ en D, D′.

1° Vérifier que $\overline{AD'}^2 + \overline{A'D}^2 = \overline{AA'}^2$.

2° On reporte les segments AD′, A′D sur la circonférence comme cordes, en tenant compte de leurs sens, et on obtient un nouveau point M′: on demande d'étudier les variations de l'arc MM′, lorsque le point M parcourt la circonférence donnée.

(Dellac.)

347. — Soient A, B, C, trois points en ligne droite. Par A, on fait passer une droite mobile Δ et, des points B, C on abaisse, sur Δ, des perpendiculaires BB′, CC′. Trouver le lieu décrit par le point de concours des diagonales du trapèze ainsi formé.

(G. L.)

RECTIFICATIONS

Page 173, *au lieu de* Gymnase de Froïtrx, *lisez* Gymnase de *Troïtzk*; *au lieu de* miroir P, lisez *milieu* P.

Page 174, dans la figure 1, il faut changer les lettres I, I_1, I_2,... par T, T_1, T_2,... et réciproquement.

Page 178, *au lieu de* courbe G, lisez courbe CI.

Page 179, dans la figure 3, il faut changer la lettre I par T.

Le Directeur-gérant,
G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 22938-10-9.

SUR LES MAXIMUMS ET LES MINIMUMS

Par M. l'abbé **Ropert**, professeur au Petit Séminaire de Guérande (L.-I.).

1. — *En désignant par* h, k *des coefficients positifs, trouver le maximum de* mx + ny, *en supposant* kx² + hy² = a² (*).

Les conditions du maximum, comme l'on sait, ne seront pas changées si l'on élève $mx + ny$ au carré, et si l'on multiplie, par une constante le carré ainsi obtenu constant. L'identité d'Euler (**) donne

(A) $kh(mx + ny)^2 \equiv (m^2h + n^2k)(kx^2 + hy^2) - (nkx - mhy)^2$,

et, par suite, en tenant compte de la relation donnée,

$$kh(mx + ny)^2 = (m^2h + n^2k)a^2 - (nkx + mhy)^2.$$

Ainsi, le maximum de $kh(mx + ny)^2$, et par suite le maximum cherché, a lieu en même temps que le minimum de $(nkx - mhy)^2$, c'est-à-dire pour $nkx = mhy$, etc.

2. — *Quel est le minimum de* kx² + hy², *pour* mx + ny = b?

L'identité (A) peut s'écrire

$$(m^2h + n^2k)(kx^2 + hy^2) \equiv kh(mx + ny)^2 + (nkx - mhy)^2$$
$$= khb^2 + (nkx - mhy)^2.$$

Le minimum cherché a donc lieu en même temps que celui de $(nkx - mhy)^2$, c'est-à-dire pour $nkx = mhy$, etc.

3. — *Minimum de* mx — ny, *pour* kx² — hy² = c.

On a, comme plus haut,

(B) $kh(mx - ny)^2 \equiv (m^2h - n^2k)(kx^2 - hy^2) + (nkx - mhy)^2$

(*) Cette question généralise un exercice proposé dans l'*Algèbre* de M. Combette, p. 591.

(**) L'identité d'Euler, à laquelle nous faisons allusion ici, est la suivante (Voyez G. de Longchamps, *Algèbre*, 2e édition, p. 9).

$$(a^2 + pb^2)(c^2 + pd^2) \equiv (ac + pbd)^2 + p(ad - bc)^2.$$

Pour en déduire (A), on pose :

$$a = m, \quad b = n, \quad p = \frac{k}{h}, \quad c = y, \quad d = x.$$

et par conséquent,

$$kh(mx - ny)^2 = (m^2h - n^2k)c + (nkx - mhy)^2;$$

et le minimum cherché a encore lieu pour $nkx = mhy$.

4. — *Maximum de* $kx^2 - hy^2$, *pour* $mx - ny = d$.

L'identité (B) donne

ou $(m^2h - n^2k)(kx^2 - hy^2) \equiv kh(mx - ny)^2 - (nkx - mhy)^2$,

$$(m^2h - n^2k)(kx^2 - hy^2) = khd^2 - (nkx - mhy)^2.$$

On trouve encore $nkx - mhy = 0$.

On remarquera, pour la généralisation qui suit, que l'égalité, trouvée dans les exercices précédents, peut s'écrire :

$$\frac{kx}{m} = \frac{hy}{n}.$$

5. — *Maximum de* $mx + ny + pz$, *pour* $kx^2 + hy^2 + iz^2 = a$.

On observera que

$$\text{(C)}\quad khi(mx+ny+pz)^2 \equiv (m^2hi+n^2ik+p^2kh)(kx^2+hy^2+iz^2) - i(nkx - mhy)^2 - k(phy - niz)^2 - h(miz - pkx)^2 \text{ (*)}.$$

Le premier terme du second membre étant constant, le maximum cherché a lieu en même temps que les minimums de : $(nkx - mhy)^2$, $(phy - niz)^2$, $(miz - pkx)^2$; c'est-à-dire pour

$$\left.\begin{matrix} nkx = mhy \\ phy = niz \\ miz = pkx \end{matrix}\right\}, \text{ ou } \frac{kx}{m} = \frac{hy}{n} = \frac{iz}{p}.$$

6. — *Minimum de* $kx^2 + hy^2 + iz^2$, *pour* $mx + my + pz = b$.

On peut écrire (C) sous la forme

$$(m^2hi + n^2ik + p^2kh)(kx^2 + hy^2 + pz^2) \equiv khi(mx + ny + pz)^2 + i(nkx - mhy)^2 + \ldots$$

et l'on voit que le minimum cherché a encore lieu pour $\frac{kx}{m} = \frac{hy}{n} = \frac{iz}{p}$.

7. — L'extension à un nombre quelconque de variables est évidente.

(*) Cette identité est intéressante. En supposant $h = k = i$, on retrouve l'identité de Lagrange; elle représente donc une généralisation de celle-ci.

G. L.

DES COORDONNÉES SOUS-TRILINÉAIRES

Par M. **Aug. Poulain**, à Angers.

(*Suite et fin*, voir p. 245.)

9. Théorème II. — *Dans un quadrilatère inscriptible, convexe ou non convexe, le rapport des diagonales égale le rapport des sinus des angles opposés ;* ou encore, *le produit de chaque diagonale, par le sinus de l'angle qu'elle partage, est constant.*

En effet, le rapport de chaque diagonale, au sinus de l'angle opposé, égale le diamètre 2R du cercle circonscrit au quadrilatère.

10. — Cela posé, la distance $\delta = M_0M_1$ est donnée par la formule suivante :

$$(12) \quad \delta^2 = \frac{(y_1' - y_0')^2 + (z_1' - z_0')^2 + 2(y_1' - y_0')(z_1' - z_0')\cos A}{\sin^2 A},$$

De cette formule on déduit deux autres expressions de δ^2 obtenues par permutation circulaire des lettres.

En effet, transportons la droite M_0M_1, parallèlement à elle-même, de manière que M_0 viennent en A. Les projections ne changent pas et déterminent alors un quadrilatère inscriptible birectangle, dont M_0M_1 est la diagonale ; ce qui donne immédiatement (*) une relation équivalente à (12) :

$$(13) \qquad \overline{AM}^2 \sin^2 A = \overline{B_1C_1}^2.$$

11. — Ces trois formules en fournissent quatre autres. Car

(*) En prenant AC, AB comme axes de coordonnées, on arriverait aux mêmes formules. Le théorème II fournit un moyen plus rapide et plus élémentaire. Cette méthode ne diffère, que par la forme, de celle de M. Kœhler. *(Exercices de Géométrie analytique).* Le même auteur transforme la formule (12) des trilinéaires dans la suivante

$$\delta^2 = \frac{R^2}{S^2}(\Sigma X^2 - 2\Sigma XY \cos C),$$

ou l'on pose $X = y_1z_0 - y_0z_1$, et où l'on permute circulairement les lettres. M. Boutin arrive au même résultat, par une autre voie (J. E. 1889, p. 76).

nous avons une suite de trois rapports égaux. Nous pouvons les combiner de manière à amener au dénominateur, soit $\Sigma \sin^2 A = 2\Delta$, soit l'une des trois expressions telles que $\sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A = 2 \sin B \sin C \cos A$. Ou encore nous pouvons faire ces opérations après avoir multiplié les deux termes de chaque rapport par $4 \cos^2 A, \ldots$; ce qui amène finalement aux dénominateurs

$\Sigma \sin^2 2A$ ou $\sin^2 2B + \sin^2 2C - \sin^2 2A = 2 \sin 2B \sin 2C \cos 2A$.

Enfin, on peut modifier finalement les numérateurs en ajoutant ou retranchant le carré de l'expression (8), laquelle est nulle.

Nous pouvons appliquer à la distance λ ces vingt-deux formules et beaucoup d'autres du même genre.

12.— Le principe de réciprocité (**6**, 2°) nous montre que toutes ces formules restent vraies en coordonnées normales (*). On le prouve directement par les mêmes quadrilatères inscriptibles. Les formules (12) subsistent aussi, si l'on remplace ABC par un polygone quelconque. Elles ne supposent même que l'existence d'un angle.

13. — Nous devons, à l'obligeance de M. Neuberg, une indication intéressante. C'est que, *en coordonnées triliniaires, on peut toujours transformer* δ^2 *de manière que son expression renferme uniquement, soit les carrés de* $x_1 - x_0 \ldots$, *soit les rectangles de ces binômes.*

En effet, dans la relation (8), faisons passer dans le second membre $a(x_1 - x_0)$ et élevons les deux membres au carré. Nous en tirons la valeur du rectangle $(y_1 - y_0)(z_1 - z_0)$ et nous pouvons la substituer dans (12); ce qui ne donne plus que des carrés. On trouve ainsi une formule énoncée dans *Mathesis* (1889, p. 134) :

$$(14) \qquad \delta^2 = \frac{R^2}{S} \Sigma (x_1 - x_0)^2 \sin 2A;$$

(*) Chacune de ces relations donne, en coordonnées trinormales ou multinormales, l'équation des cercles. Dès lors, aussi, toutes les valeurs données pour δ sont décomposables en un produit de facteurs imaginaires du premier degré, puisque, égalées à zéro, elles donnent des cercles de rayon nul.

ou, en coordonnées barycentriques absolues,

(15) $$\delta^2 = \frac{2}{S}\Sigma(\alpha_1 - \alpha_0)^2 \text{ cotg } A.$$

Au contraire, si l'on multiplie les deux membres de (8) par $y_1 - y_0$ ou $z_1 - z_0$, on tire de là les valeurs des carrés en fonction des rectangles seuls. On trouve ainsi, rapidement, la relation établie par M. Plamenewsky, au moyen de la formule de Stewart (J. E. 1889, p. 150) :

(16) $$\delta^2 = -\frac{R}{S}\Sigma a(y_1 - y_0)(z_1 - z_0) \text{ (*)}.$$

14. — Avant de terminer, donnons une application du théorème sur le quadrilatère inscriptible (**9**). Nous en avons déduit l'égalité (13).

1° Cette égalité montre que λ sin A *égale le côté correspondant du triangle podaire de* M. On peut donc, pour tout point remarquable, calculer les côtés du triangle podaire. Si ce dernier est oblique, c'est-à-dire s'il est déterminé par des droites inclinées d'un même angle θ sur les perpendiculaires, et dans le même sens, on a, en posant $\lambda_1 = B_1 C_1$,

(17) $$\lambda_1 \cos\theta = \lambda \sin A.$$

(Ces divers triangles podaires de M sont semblables entre eux.)

2° Inversement, étant donnés *deux* côtés du triangle podaire, on peut construire λ, μ, ν et, dès lors, le troisième côté. On observera encore que λ_1, μ_1, ν_1 peuvent être regardés comme formant un système de coordonnées.

(*) Inversement, étant donnée une formule quelconque, pour δ, on a un procédé général pour montrer son identité avec la valeur fondamentale (12). C'est d'éliminer une des coordonnées, par exemple, $x_1 - x_0$. Car alors les égalités à comparer peuvent être regardées comme donnant des cercles de même centre et de même rayon δ. Or, comme il ne reste que deux coordonnées, ces équations sont forcément identiques à un facteur près. — On voit que, parmi les expressions de la distance de deux points, il y en a cinq qui sont plus avantageuses. Ce sont celles qui n'ont que trois ou quatre termes, savoir : 1° la formule fondamentale (12); 2° celle aux carrés (14); 3° celle aux rectangles (16); 4° et 5° les deux formules tripolaires (J. S. 1889, p. 8) qui, de plus, permettent de n'avoir que les coordonnées relatives pour un des points. Il serait à désirer qu'on fît un tableau de ces divers résultats pour les distances correspondant aux points les plus remarquables.

3° Par suite, à toute formule ou équation renfermant λ, μ, ν, en correspond une autre renfermant λ_1, μ_1, ν_1. On voit que dans cette transformation, le théorème de Ptolémée a pour corrélatif celui de Simpson (avec l'extension de Carnot au cas des obliques). Car le premier théorème donne, quand M est situé sur l'arc AB du cercle circonscrit,

$$c\nu = a\lambda + b\mu. \qquad (18)$$

Or, d'après ce qui précède, cette relation équivaut à

$$\nu_1 = \lambda_1 + \mu_1,$$

c'est-à-dire que le triangle podaire se réduit à une droite.

ESSAI
SUR LA
GEOMÉTRIE DE LA RÈGLE ET DE L'ÉQUERRE

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite* et *fin*, voir p. 248.)

EXERCICES (*)

1. — Tracer, dans la partie où elle est accessible, la perpendiculaire abaissée d'un point inaccessible A, sur une droite donnée Δ. On suppose que A est visible, mais que le pied H de la perpendiculaire en question est inaccessible.

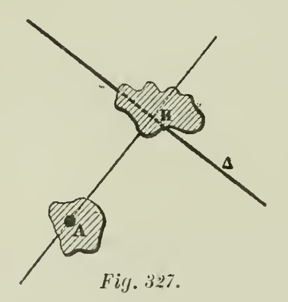


Fig. 327.

2. — Mener, à une circonférence O, une tangente allant passer par le point de concours, inaccessible, de deux droites données Δ, Δ' (**).

(*) Ces exercices terminent notre *Essai sur la Géométrie de la Règle et de l'Équerre*. Cet ouvrage, tiré à un petit nombre d'exemplaires, est en vente à la librairie Delagrave.

Comme on pourrait interpréter, dans un sens inexact, les énoncés qui suivent, nous avons donné pour quelques-uns d'entre eux l'indication d'une des réponses qu'ils comportent. Le lecteur, guidé par cette indication, pourra trouver, pour chacun de ces exercices, beaucoup d'autres solutions.

(**) Cette question a été proposée dans l'*Educational Times*, par M. Ignacio

3. — Étant donnés deux arcs de cercle α, β, appartenant à des circonférences A, B, dont les centres sont inaccessibles; on propose de mener les tangentes communes dont les points de contact appartiennent aux arcs considérés.

4. — Tracer une route circulaire passant par deux points A, B, et par un troisième point C, visible, mais inaccessible.

Examiner le cas particulier où les points A, B, sont confondus en un point M, d'une droite donnée Δ.

5. — Par un point A, et par deux autres points B, C, inaccessibles, faire passer une route circulaire.

Examiner le cas où les trois points donnés sont inaccessibles.

Dans ce problème, comme dans le précédent, on indiquera la construction, *point par point*, de la circonférence demandée (*).

Beyens, capitaine du génie à Cadix, et résolue dans le numéro du 1er janvier 1889. La solution donnée *(loc. cit.)*, et que nous allons reproduire, est très élégante.

On prend les pôles des droites Δ, Δ', relativement à O. La droite qui passe par ces deux points rencontre la circonférence donnée, aux points de contact cherchés.

Le problème est du second degré et, au premier abord, il semble se traiter par la règle et l'équerre, ce qui implique contradiction. Mais il faut observer que, dans le cas présent, on s'accorde la présence d'une circonférence dans le plan de l'épure, ce qui revient à se donner un compas. (Voir la note de la p. 25.)

(*) Il y a, bien entendu, aux problèmes de cette espèce, des solutions très variées. On peut, pour ces solutions, s'accorder de simples alignements; ou, dans d'autres cas, la fausse équerre, l'équerre ordinaire, le cordeau divisé. Il faut aussi discuter la solution proposée, et, notamment, voir si elle est *générale* dans le sens que nous avons donné à ce mot, au cours de cet ouvrage; ou au contraire, si, au point de vue pratique, elle est seulement réalisable dans certains cas.

Ainsi, dans le cas présent, si l'on peut déterminer, par des coups d'équerre, l'orthocentre H du triangle ABC, dont les sommets sont inaccessibles, en prenant, si la chose est possible, les symétriques de H, par rapport aux côtés de ABC, on obtient trois points appartenant à la circonférence que l'on veut construire point par point. On est ainsi ramené à un problème plus simple et dont la solution n'offre aucune difficulté. Mais cette manière de résoudre le problème est soumise à objection, au point de vue pratique; car les constructions indiquées ne sont pas réalisables, dans tous les cas. Cette solution n'est donc pas générale.

6. — Par un point A, inaccessible, et qui n'est visible que des points B, C, on propose de tracer une route parallèle à une droite donnée Δ.

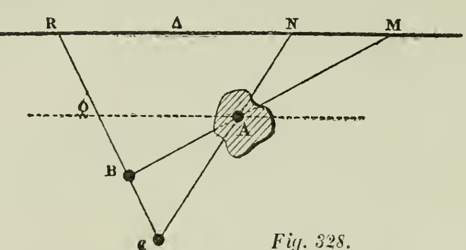


Fig. 328.

Les lignes de visée, BA, CA, peuvent être prolongées au delà de l'obstacle. Elles rencontrent Δ aux points M, N. Soit AQ la parallèle cherchée. On a

$$\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{BR}}\cdot\frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AC}}\cdot\frac{\mathrm{MR}}{\mathrm{MN}}=1.$$

Mais

$$\frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AC}}=\frac{\mathrm{QR}}{\mathrm{QC}},$$

par suite,

$$\frac{\mathrm{QR}}{\mathrm{PC}}=\frac{\mathrm{BR.MN}}{\mathrm{BC.MR}}.$$

Cette égalité, dont le second membre ne renferme que des quantités connues, permet de calculer le rapport QR : QC. Le point Q se trouve ainsi déterminé, etc...

7. — Deux points A, B, sont inaccessibles et invisibles

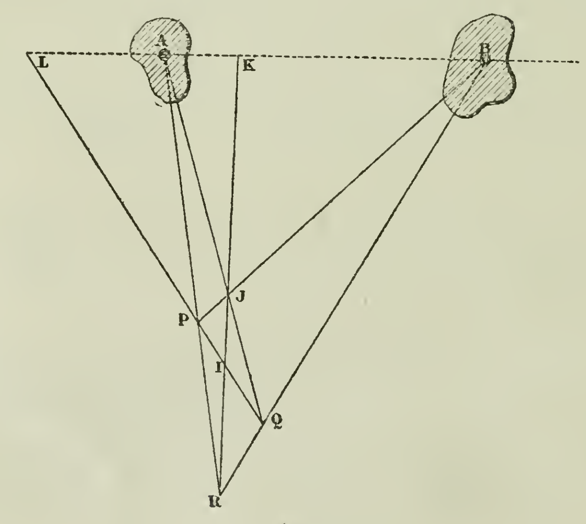


Fig. 329.

pour tous les points de la ligne AB ; on propose de jalonner cette droite, point par point.

Voici une indication pour la solution de ce problème. Les points A, B sont visibles, on doit le supposer, de deux points donnés P, Q. En effectuant les alignements qu'indique la figure, on a

$$\frac{1}{RK} = \frac{2}{RJ} - \frac{1}{RI}, \quad \frac{1}{QL} = \frac{2}{QP} - \frac{1}{QI}.$$

Les points K, L, peuvent donc être déterminés, etc...

8. — Par deux points A, B, tracer une circonférence allant passer par le point de concours inaccessible ω, de deux droites données Δ, Δ'.

On tracera d'abord une droite Δ'' passant par A, et par ω ; puis, par B, on mène une semi-droite BC faisant avec BA un angle égal à $\widehat{\Delta', \Delta''}$; BC rencontre Δ' en un point C appartenant à la circonférence cherchée, etc.

9. — Par un point A, tracer un arc de circonférence qui, prolongé, passe par les points ω, ω', inaccessibles, mais déterminés : le, premier, par les droites Δ, δ ; le second, par deux autres droites Δ', δ'.

10. — Déterminer l'orthocentre H d'un triangle ABC, dont les sommets sont inaccessibles.

Il s'agit de tracer deux droites, dans la partie accessible, allant concourir en H.

On coupe le triangle ABC par une droite Δ, menée dans la partie accessible ; Δ forme avec les côtés de ABC, pris deux a deux, trois triangles. Si l'on peut construire les orthocentres de ces triangles, on obtient trois points situés sur une droite passant par H, etc.

Autrement. Sur la partie accessible de AB on prend deux points P, Q, et l'on trace les droites, δ, δ', qui partant des points P, Q, iraient aboutir en C. Soit H' l'orthocentre de PQC ; si, de H', on abaisse une perpendiculaire sur AB, cette droite est l'une des hauteurs de ABC ; etc.

11. — Déterminer le centre de gravité G, le centre du cercle inscrit, le centre du cercle circonscrit, etc..., d'un triangle, dont les sommets A, B, C, sont situés en dehors des limites de l'épure.

On prend, sur la partie accessible du côté BC, deux points quelconques P, Q ; et, par ces points, on mène des parallèles aux côtés BA, CA. Elles se coupent en un point R ; soit G' le centre de gravité du triangle PQR. Ayant mené, par R, une droite allant passer par le point inaccessible A ; cette droite AR coupe BC en un point ω, centre d'homothétie des triangles ABC, PQR. Ainsi, GG' va passer par le point inconnu F, etc.

Cette solution est *générale* ; elle s'applique à tous les cas qui peuvent se présenter, si petites que soient les portions accessibles des côtés de ABC.

On observera, en outre, qu'elle convient à la recherche de tous les points remarquables d'un triangle dont les sommets sont inaccessibles.

Comme solutions particulières des problèmes posés, on peut indiquer les suivantes :

1° *Centre de gravité.* Une parallèle à BC coupe les parties accessibles des droites AB, AC, aux points B′, C′ La droite qui va du milieu de B′C′, au sommet A, passe par G, etc.

2° *Centre du cercle inscrit.* On élève, dans la partie accessible, aux côtés AB, AC, des perpendiculaires de même longueur et, par les extrémités obtenues, on mène des parallèles à ces côtés; elles se coupent en un point, qui appartient à la bissectrice de l'angle A. etc.

3° *Centre du cercle circonscrit.* On détermine les milieux des côtés du triangle ABC, comme nous venons de l'expliquer, quand nous avons cherché le centre de gravité, etc.

Autrement. En coupant le triangle ABC par une transversale Δ, on obtient trois nouveaux triangles et le cercle qui passe par les centres des cercles circonscrits à ces triangles va passer par le point inconnu, etc.(*)

Autrement. On détermine l'orthocentre H et l'on prend les symétriques de H par rapport aux côtés BC, CA, AB. On obtient ainsi trois points du cercle circonscrit, etc.

12. — Etant donnés trois points A, B, C, formant un triangle tel que le centre de la circonférence circonscrite soit située en dehors des limites de l'épure, on propose de tracer cette circonférence, point par point, en ne faisant usage que de la règle et de l'équerre.

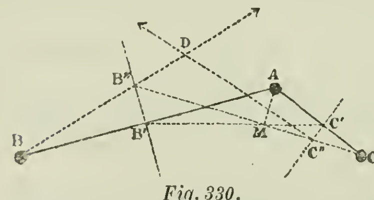


Fig. 330.

Soient B′, C′ les milieux des côtés AB, AC. Ayant pris sur B′C′ un point arbitraire M, on élève à MA, au point M, une perpendiculaire qui rencontre les perpendiculaires élevées aux milieux des côtés AB, AC, en des points B″, C″. Les droites BB″, CC″, concourent en D; ce point appartient à la circonférence en question.

(*) Nous nous appuyons ici sur cette propriété : *les centres des cercles circonscrits aux triangles formés par les côtés d'un quadrilatère complet appartiennent à une même circonférence.*

Ce théorème a été donné par nous, avec plusieurs autres, dans la *Revue des Sociétés savantes*, numéro du 6 mai 1864. Nous avons supposé, à cette époque, qu'il était connu, à cause de son extrême simplicité. Peut-être nous sommes-nous trompé, car il a été, depuis, retrouvé et donné comme nouveau, dans les *Nouvelles Annales* 1871, p. 206.

13. — Mener, par un point donné A, une normale à un arc de cercle dont le centre ω est située dans la partie inaccessible de l'épure.

Examiner le cas où A est à l'infini.

On prend trois points P, Q, R, sur l'arc donné; les perpendiculaires élevées aux milieux des cordes PQ, PR, se couperaient en ω, si l'on pouvait les prolonger. On est ainsi ramené au problème classique : mener, par un point A, une droite allant passer par le point de concours, inaccessible, de deux droites données.

Dans le cas particulier où l'on veut mener une normale parallèle à une direction donnée, on trace une corde perpendiculaire à cette direction, etc.

14. — Deux arcs de cercle ont leurs centres situés en dehors des limites de l'épure; on propose de déterminer le rapport de leurs rayons.

On peut prendre sur les arcs proposés deux points A, A' et, par ces points, mener les normales Δ, Δ' (Ex. 13). On trace alors deux cordes AB, A'B' inclinées, sur les droites, d'angles égaux; AB : A'B' représente le rapport cherché.

15. — Dans les conditions données dans l'exercice précédent, on propose de mener la normale commune aux deux arcs de cercle considérés.

Déterminer aussi l'axe radical des circonférences auxquelles appartiennent ces arcs de cercle, et leur centre de similitude.

16. — Deux droites Δ, δ, d'une part; Δ', δ', d'autre part, se coupent aux points ω, ω', en dehors des limites de l'épure. Tracer, dans la partie accessible, une parallèle à $\omega\omega'$ (*).

(*) Il ne faut pas confondre cet exercice avec les problèmes analogues traités au chapitre VI. Ici, les points sont tout à la fois inaccessibles et invisibles. Il est vrai qu'on peut résoudre l'ex. 16 en déterminant d'abord les projections de ω, ω', sur une droite D, arbitrairement choisie et en appliquant les tracés indiqués au § 70. Mais il y a beaucoup d'autres solutions plus simples, pour le problème en question.

17. — Un arc de cercle Δ a son centre situé hors des limites de l'épure. Par un point A, pris sur une tangente D, mener à Δ la seconde tangente,

On trace la normale à Δ passant par A (Ex. 13), puis l'on construit la droite symétrique de D, par rapport à cette normale.

18. — Parallèlement à une droite donnée, mener une tan-

gente à un arc de cercle dont le centre est situé hors des limites de l'épure.

19. — Étant donné un point A et un autre point B, visible, mais inaccessible; tracer, point par point, une circonférence passant par A et admettant B, pour centre (*). *(Steiner.)*

20. — Étant donné un triangle ABC, construire avec la règle et l'équerre les expressions :

$$\frac{a}{2}\cos A, \qquad \frac{b}{2}\cos B, \qquad \frac{c}{2}\cos C.$$

(Catalan.)

On déterminera d'abord le point de concours O des perpendiculaires élevées aux milieux des côtés du triangle. En projetant en K, sur OB, le milieu A″ de BC, $A''K = \frac{a}{2}\cos A$.

Autrement. — Menons les hauteurs BB′, CC′; puis C′G, B′H perpendiculaires à BC; B′E perpendiculaire à BA; C′D perpendiculaire à CA. Les droites GD, HE se coupent en un point R. On a

$$RD = RE = \frac{a}{2}\cos A.$$

Cette solution qui nous a été communiquée par M. Catalan, offre l'avantage de donner du même coup, deux lignes égales à la longueur cherchée, sans exiger un tracé plus long que celui qui résulte de la construction indiquée dans la première solution.

21. — Étant donnés deux points A, B d'une parabole et son axe Δ; déterminer le sommet S de la courbe, ce point étant supposé inaccessible.

Le point inconnu S appartient à Δ. Pour résoudre la question posée, il suffit de trouver une droite allant passer par le point S. En effet, un point

---

(*) Ce problème m'a été signalé par M. Laurens. Il est proposé et résolu dans un ouvrage de Steiner, publié en 1833, ayant pour titre: *Des constructions géométriques au moyen de la règle et d'un cercle fixe;* mais on peut le considérer comme appartenant à la géométrie de la règle et du cordeau. La solution donnée par Steiner repose sur la considération simultanée du centre de similitude interne et du centre de similitude externe de deux circonférences.

A la suite, Steiner propose le problème indiqué plus haut (Ex. 12) et après avoir donné une solution basée, comme la précédente, sur la considération des centres de similitude, il signale en note le *Manuel de l'arpentage et du nivellement* de Crelle (1826) dans lequel on trouvera, dit-il, une ingénieuse solution du problème en question. Cette solution ne m'est pas connue et je regrette de ne pouvoir l'exposer ici.

inaccessible est déterminé par deux droites ne se rencontrant pas dans les limites de l'épure.

Soit M le milieu de AB, M′ la projection de M sur Δ. La perpendiculaire élevée, en M, à AB, rencontre Δ en N; on prend NM″ = M′N. Soit A′ la projection de A sur MM′. La perpendiculaire abaissée de A, sur M″A′ va passer sur S.

22. — On connaît l'axe Δ et deux points A, B d'une parabole dont le sommet est inaccessible; construire, point par point, l'arc AB.

Ayant déterminé le point M″, comme il est dit dans l'exercice précédent, on prend sur MM′ un point arbitraire H et, du point inaccessible S, on abaisse (par un des procédés connus) une perpendiculaire sur M″H. Cette droite coupe la parallèle à Δ, menée par H, en un point qui appartient à la parabole considérée.

En supposant que H soit pris sur le segment qui représente la projection de AB sur MM′, on construira, ainsi, l'arc AB, point par point.

EXERCICES DIVERS

Par M. **A. Boutin**, professeur au Collège de Courdemanche.

(*Suite*, voir p. 226.)

128. — Dans un triangle, on a les deux identités :

1° $$\left(1 - \cot\frac{A}{2}\cot B\right)\left(1 - \cot\frac{B}{2}\cot C\right)\left(1 - \cot\frac{C}{2}\cot A\right) = \left(1 - \cot\frac{A}{2}\cot C\right)\left(1 - \cot\frac{B}{2}\cot A\right)\left(1 - \cot\frac{C}{2}\cot B\right).$$

2° $$\left(1 + \operatorname{tg}\frac{A}{2}\cot B\right)\left(1 + \operatorname{tg}\frac{B}{2}\cot C\right)\left(1 + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\cot A\right) = \left(1 + \operatorname{tg}\frac{A}{2}\cot C\right)\left(1 + \operatorname{tg}\frac{B}{2}\cot A\right)\left(1 + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\cot B\right).$$

129. — x, y, z étant les coordonnées normales du point M. Déterminer ce point de manière que la fonction

$$\lambda(x^2 + y^2 + z^2) + \mu(xz + yz + xy)$$

soit maximum ou minimum.

Les équations du maximum ou du minimum sont :

$$2\lambda x + \mu(y + z) = ak,$$
$$2\lambda y + \mu(x + z) = bk,$$
$$2\lambda z + \mu(x + y) = ck ;$$

d'où
$$x = \frac{k}{\mu - 2\lambda}\left(\frac{\mu p}{\lambda + \mu} - a\right),$$

ce qui nous montre que le lieu de M, quand λ et μ varient, est la droite KI qui joint le centre inscrit au point de Lemoine.

Sauf pour $\mu = 2\lambda$ et $\lambda + \mu = 0$, il y a maximum pour $\mu > 2\lambda$, minimum pour $\mu < 2\lambda$.

Comme cas particuliers :

$\mu = 0$, point de Lemoine, valeur du minimum : S tg θ.

$\lambda = \mu = 1$, point dont les coordonnées normales sont

$$\frac{x}{2a - p} = \frac{y}{2b - p} = \frac{z}{2c - p},$$

la valeur du minimum est : $\dfrac{8S^2}{3\Sigma a^2 - 2\Sigma ab}$,

$\alpha = -1$, $\beta = 2$. Point complémentaire du réciproque du centre du cercle inscrit, la valeur du maximum est :

$$\frac{8S^2}{\Sigma ab}.$$

$\alpha = 0$, $\beta = 1$. Point dont les coordonnées barycentriques sont :

$$\frac{\alpha}{\cos^2\frac{A}{2}} = \frac{\beta}{\cos^2\frac{B}{2}} = \frac{\gamma}{\cos^2\frac{C}{2}},$$

la valeur du maximum est : $\dfrac{4S^2}{2\Sigma ab - \Sigma a^2}$.

130. — On projette les centres des cercles inscrits et ex-inscrits à un triangle sur les trois côtés de ce triangle, soient S_1, S'_1, S''_1, S'''_1 les aires des quatre triangles obtenus.

On a :

$$\frac{S'_1}{r'^2} + \frac{S_1''}{r''^2} + \frac{S_1'''}{r'''^2} = \frac{S_1}{r^2}.$$

On trouve :

$$2S_1 = r(\sin A + \sin B + \sin C)$$
$$2S'_1 = r'(\sin B + \sin C - \sin A),$$

d'où, la relation indiquée.

131. — Le lieu des points M du plan d'un triangle tels que la somme des carrés des côtés du triangle podaire correspondant, est constante est un cercle concentrique au point de Lemoine du triangle de référence.

Nous rappelons qu'on appelle *triangle podaire* d'un point, le triangle qui a pour sommets les projections orthogonales de ce point sur les côtés du triangle de référence.

132. — Si l'on porte sur les perpendiculaires élevées aux milieux des côtés d'un triangle ABC des longueurs ka, kb, kc, on forme un triangle A'B'C'. Le triangle pour lequel la somme des carrés de ses côtés est minimum est le premier triangle de Brocard.

On trouve, en effet,

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = S(12k^2 \operatorname{cotg} \theta + 12k + \operatorname{cotg} \theta)$$

d'où, pour le minimum de $a'^2 + b'^2 + c'^2$, $k = -\frac{1}{2} \operatorname{tg} \theta$, ce qui répond au premier triangle de Brocard.

133. — On considère un triangle ABC et le cercle circonscrit O. De chacun des sommets comme centre, avec R pour rayon, on décrit un cercle. Les cordes communes à O et à ces cercles, prolongées s'il y a lieu, forment un triangle A'B'C', en se coupant deux à deux.

1° O est le centre du cercle inscrit dans A'B'C';

2° A'B'C' est homothétique au triangle orthocentrique de ABC, le rapport d'homothétie est

$$\frac{1}{4 \cos A \cos B \cos C};$$

3° Aire de $A'B'C' = \frac{R^2}{4} \operatorname{tg} \varphi \quad (\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C)$;

4° Les droites AA', BB', CC', sont concourantes en un point dont les coordonnées barycentriques par rapport à ABC, sont :

$$\frac{\alpha \cos (B - C)}{a^2} = \frac{\beta \cos (C - A)}{b^2} = \frac{\gamma \cos (A - B)}{c^2}.$$

134. — Par l'orthocentre d'un triangle on mène une droite quelconque λ. Démontrer que les symétriques de λ par rapport aux côtés de ce triangle se coupent en un même point de la circonférence circonscrite.

On observe que les symétriques de l'orthocentre par rapport aux côtés se trouvent sur la circonférence circonscrite, et on montre que l'angle de deux des droites symétriques de λ se coupent sous un angle constant qui a précisément pour mesure le demi-arc intercepté par ces droites sur la circonférence O.

135. — Soit ABC un triangle, H son orthocentre; A_1A_2 le

diamètre du cercle HBC perpendiculaire à BC, B_1, B_2, C_1, C_2 des points analogues. Calculer les aires $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$.

On a :

$$OA_1 = R(2 \cos A + 1) \dots$$
$$OA_2 = R(2 \cos A - 1) \dots$$
$$\frac{2A_1B_1C_1}{R^2} = \Sigma(2 \cos A + 1)(2 \cos B + 1) \sin C$$
$$\frac{2A_2B_2C_2}{R^2} = \Sigma(2 \cos A - 1)(2 \cos B - 1) \sin C$$

ou, tous calculs faits.

$$2A_1B_1C_1 = 2S - Rp$$
$$2A_2B_2C_2 = 2S + 3Rp$$

136. — On projette le centre O du cercle circonscrit au triangle ABC en A′, B′, C′ sur les hauteurs de ce triangle ; montrer que les triangles ABC, A′B′C′ sont semblables.

137. — On projette l'orthocentre H sur OA, OB, OC en A_1, B_1, C_1, les deux triangles A′B′C′ (de l'exercice précédent) et $A_1B_1C_1$ sont inscrits dans le même cercle. Montrer que A′, B′, C′, sont sur ce cercle les milieux des arcs sous-tendus par les côtés de $A_1B_1C_1$; 2° les droites $A'A_1$, $B'B_1$, $C'C_1$ concourent en un même point, orthocentre de A′B′C′, centre du cercle inscrit dans $A_1B_1C_1$.

138. — On considère deux parallèles Δ, Δ', un point quelconque O de leur plan ; par O on mène une sécante Δ'' qui coupe Δ, Δ' en A et B ; en A, on mène une perpendiculaire à Δ', en B une perpendiculaire en Δ'', ces perpendiculaires se coupent en M. Lieu du point M.

Des considérations de triangles semblables montrent que ce lieu est une parabole qui a pour axe la perpendiculaire abaissée de O sur les parallèles et pour sommet le pied de cette perpendiculaire sur Δ.

139. — On donne les longueurs de trois droites $OA = \alpha$, $OB = \beta$, $OC = \gamma$, les orienter autour du point O, de manière que le triangle ABC ait l'aire maximum.

Si x, y, z sont les angles des droites entre elles, la condition du maximum est :

$$\frac{\cos x}{\alpha} = \frac{\cos y}{\beta} = \frac{\cos z}{\gamma},$$

ce qui montre que O doit être le point de concours des hauteurs de ABC.

CORRESPONDANCE

A propos de l'article de M. Morel, CRELLE OU BROCARD, publié dans le précédent numéro, M. Neuberg nous a adressé une lettre fort intéressante de laquelle nous détachons les passages suivants :

1° ... C'est dans une brochure, *datée de 1816,* et intitulée : *Ueber einige Eigenschaften des elenen gerardlinigen Dreicks rücksicktlich dreier durch die Winkelspitzen gezogenen geraden Linien,* et non dans son journal dont le tome I a paru en 1826, que Crelle a traité des points Ω, Ω' (points de Brocard), et de l'angle ω (angle de Brocard).

2° .... Jacobi a repris le même sujet dans le programme scolaire de Pforta, en 1825 (*).

3° .... Dans le journal même de M. Schlömilch, on trouve d'importants travaux sur cette géométrie si vivement attaquée par lui, dans la note à laquelle M. Morel a si bien et si justement répondu. Je vous citerai particulièrement les travaux de Reuschle (t. XI, 1866, p. 475-493 et ceux de Wetzig (t. XII, 1867, p. 280-301).

Extrait de deux lettres de M. BERNÈS.

La formule que M. Plamenewski donne (**) comme nouvelle pour la distance de deux points en coordonnées normales :

$$\delta^2 = -\frac{abc}{4S^2}\Sigma a(y-y_1)(z-z_1)$$

est indiquée dans le *Traité des coordonnées trilinéaires* de Ferrers, qui date de 1861.

La formule $\delta^2 = \dfrac{abc}{4S^2}\Sigma\, a\cos A(x-x_1)^2$

(*) Ces programmes scolaires sont des brochures publiées en Allemagne par les écoles ou lycées, à la fin de chaque année scolaire. On y trouve les programmes d'études de l'établissement, les noms des élèves couronnés, et les travaux scientifiques des professeurs.

(**) Voyez *Journal*, p. 150.

s'y trouve également, ainsi que la formule relative à l'angle de deux droites, établie, dans le numéro d'avril, par M. Boutin.

Voici, à ce propos, une autre formule, proche parente de la première, et que j'ai donnée à mes élèves, dès 1883. Si $\delta, \delta', \delta''$ sont les distances (en grandeur et en signe) des trois sommets d'un triangle ABC à une droite L, ces distances vérifient la relation

$$\Sigma a^2(\delta - \delta')(\delta - \delta'') = 4S^2,$$

ou, sous une autre forme,

$$\Sigma(b^2 + c^2 - a^2)(\delta' - \delta'')^2 = 8S^2.$$

Cette formule, et celle que j'ai rappelée au début de ma lettre, sont des conséquences immédiates de cette propriété :

Si q, q′, q″ *sont les projections* (en grandeur et signe) *d'une longueur* MN *sur les côtés* BC, CA, AB *d'un triangle, on a*

$$4S^2.\overline{MN}^2 = -abc\,\Sigma\, aq'q''.$$

Pour le démontrer, sur MN comme diamètre, on décrit une circonférence, dans laquelle on trace les cordes MA′, MB′, MC′ parallèles à BC, CA, AB. Ces cordes sont les valeurs absolues de q, q', q''. Leurs extrémités A′, B′, C′ forment un triangle semblable à ABC. En appliquant, au quadrilatère MA′B′C′, le théorème connu sur le rapport des diagonales d'un quadrilatère inscriptible, on obtient la formule en question.

J'ajoute que, si au quadrilatère MA′B′C′ on appliquait le théorème de Ptolémée, on obtiendrait la relation

$$aq + bq' + cq'' = 0,$$

utile à noter et, d'ailleurs, facile à établir directement, en partant de ce fait que la somme algébrique des projections de BC, CA, AB sur MN, est évidemment nulle.

Soient maintenant $\delta, \delta', \delta''$ les distances des sommets du triangle ABC à une droite quelconque X du plan. On a la formule

$$\Sigma a^2(\delta - \delta')(\delta - \delta'') = 4S^2.$$

En effet $\delta' - \delta''$, $\delta'' - \delta$, $\delta - \delta'$ sont les projections de BC, CA, AB sur une perpendiculaire Y à la droite X du plan que l'on considère. Si, sur Y, on prend une longueur arbitraire l et qu'on appelle q, q', q'', ses projections sur BC, CA, AB, on a :

$$\frac{q}{l} = \frac{\delta' - \delta''}{a} \qquad \frac{q'}{l} = \frac{\delta'' - \delta}{b} \qquad \frac{q''}{l} = \frac{\delta - \delta'}{c}.$$

De ces égalités et de la relation

$$4S^2l^2 = -abc\Sigma aq'q'',$$

on déduit : $\Sigma a^2(\delta - \delta')(\delta - \delta'') = 4S^2$.

On pourrait aussi l'obtenir par un calcul direct qu'on faciliterait en généralisant un peu cette relation. Supposons que δ, δ', δ'' soient les distances de A, B, C *à un plan quelconque* P.

On obtient alors la relation :

$$\Sigma a^2(\delta - \delta')(\delta - \delta'') = 4(S^2 - S'^2),$$

dans laquelle S' représente la projection de l'aire S, sur le plan P. On peut remplacer $4(S^2 - S'^2)$ par $4S^2 \sin^2 \theta$, θ étant l'angle du plan ABC avec le plan P.

ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE DE CLUNY

JUILLET 1889

(Section des Sciences.)

Arithmétique et algèbre (8 juillet 4 h.).

I. — Deux personnes ont à se partager le droit à uns rente annuelle de a francs, payable pendant n années; elles conviennent que la première personne touchera seule les p premiers termes de cette rente, tandis que la seconde touchera seule les termes suivants.

On demande de déterminer p de façon que les deux parts soient égales.

La rente se paie une fois par an, et le premier terme échoit un an après le jour où est faite la convention précédente. On suppose les intérêts composés au taux de r pour un franc par an.

Application numérique : $n = 25$, $r = 0.0375$, $a = 25{,}280$ francs.

Le calcul ne donnant pas un nombre entier d'années, le partage ne se trouve pas égal. Quelle est la somme que la personne la plus favorisée devra remettre à l'autre, à la fin de la vingt-cinquième année pour rétablir l'égalité?

II. — On donne l'équation

$$(69 + 4m)x^2 - 15(9 - m)x + 25(4 - m) = 0,$$

et l'on demande quelles sont les valeurs que l'on doit attribuer à m :

1° Pour que les racines soient réelles;

2° Pour qu'elles soient égales (dans ce cas, on calculera la valeur de ces racines égales);

3° Pour que l'une des racines soit supérieure et l'autre inférieure à 5.

III. — Dans un cercle de rayon R, on mène un diamètre AOB et l'on prend, sur OA, une longueur OA', inférieure au rayon, et, sur OB, une longueur OB', OB' égale à OA'; on décrit sur les lignes AA', A'B' et B'B comme diamètres, trois circonférences et l'on demande de calculer la distance $OA' = x$, de telle façon que l'aire du cercle donné, diminuée de

celles des trois cercles intérieurs, soit égale à une quantité donnée πm^3. — Discuter. — Y a t-il un maximum ou un minimum pour m^3, et quelles sont les valeurs correspondantes de x?

Géométrie (9 juillet 4 h.).

I. — Un triangle rectangle ABC exécute une révolution complète autour de son hypoténuse BC et engendre ainsi un solide P :

1° Montrer qu'on peut inscrire une sphère dans ce solide et qu'on peut aussi lui circonscrire une autre sphère. (En serait-il de même si le triangle générateur était quelconque, au lieu d'être rectangle?)

2° Calculer les rayons r et r' de ces deux sphères, ainsi que la distance d de leurs centres, connaissant les deux côtés de l'angle droit $AC = b$ et $AB = c$ du triangle rectangle donné.

3° Calculer la surface convexe T et le volume V du cône qui aurait pour sommet le centre O de la sphère inscrite dans le solide P et pour circonférence de base la circonférence décrite par le sommet A.

4° Les surfaces coniques engendrées par les côtés AC et AB touchent la sphère inscrite dans le solide P suivant deux circonférences; calculer les aires S et S′ des cercles limités par ces circonférences, la distance x des centres de celles-ci et le rayon y d'une sphère dont la surface serait égale à $S + S'$.

Chaque réponse devra être écrite sous la forme algébrique la plus simple possible.

Application numérique : $b = 2$ mètres, $c = 1$ mètre.

Nota. — On ne se servira pas de la trigonométrie.

II. — On donne deux points A et D sur une circonférence; il y a, sur cette circonférence, une infinité de groupes de deux autres points B et D (ces deux points étant situés de part et d'autre de la droite AC), tels qu'entre les côtes du quadrilatère convexe ABCDA on ait la relation suivante :

(1) $$AB \times CD = BC \times DA$$

1° Connaissant un de ces points, B, par exemple, construire l'autre;

2° Prouver que la ligne droite BD passe par un point fixe M;

3° Construire les deux points B et D pour lesquels les deux diagonales du quadrilatère correspondant soient égales ($AC = BD$);

4° Trouver le lieu géométrique décrit par le point M, la relation (1) étant toujours satisfaite, dans les deux cas suivants : 1° les deux points A et C restant fixes, la circonférence primitivement donnée varie; 2° la corde AC, de longueur constante, se déplace de telle sorte que ses deux extrémités soient toujours sur la circonférence donnée supposée fixe.

BACCALAURÉAT DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE SPÉCIAL

SESSION DE NOVEMBRE 1889

MARSEILLE

On donne un cercle de rayon R et un point A à une distance de son centre égale à $R\sqrt{21}$. Mener par le point A une sécante telle que la corde interceptée par le cercle sur cette sécante soit égale au rayon.

Calculer la partie extérieure de cette corde. Interpréter la racine négative. Montrer que les deux racines sont comprises entre les limites exigées par la figure.

QUESTION 293

Solution, par M. BOUTIN, professeur au lycée de Courdemanche.

Résoudre les équations :

$$(1) \qquad (2x + b + c)(2x + c + a)(2x + a + b) + (x + a)(x + b)(x + c) = 0.$$

$$(2) \qquad 8(x + a)(x + b)(x + c) + (x + b + c - a)(x + c + a - b)(x + a + b - c) = 0$$

$$(3) \qquad 8(x + b + c - a)(x + c + a - b)(x + a + b - c) + (x + 3a - b - c)(x + 3b - c - a)(x + 3c - a - b) = 0$$

et trouver la clef qui permet de former, en nombre indéfini, les équations du même genre. (G. L.)

1° La première équation peut s'écrire :

$$(3x + a + b + c)[3x^2 + 2x(a + b + c) + ab + ac + bc] = 0$$

qui donne $x = -\dfrac{a + b + c}{3}$.

Les deux autres racines sont fournies par l'équation du second degré

$$3x^2 + 2x(a + b + c) + ab + ac + bc = 0,$$

On peut remarquer que les racines de cette équation sont réelles, quels que soient a, b, c. Donc (1) a toujours trois racines réelles.

(2) et (3) s'écrivent respectivement :

$$(3x + a + b + c)[3x^2 + 2x(a + b + c) + 2ab + 2ac + 2bc - a^2 - b^2 - c^2] = 0$$

$$(3x + a + b + c)[3x^2 + 2x(a + b + c) + 6ab + 6ac + 6bc - 5a^2 - 5b^2 - 5c^2] = 0,$$

Chacune d'elle admet donc la racine :

$$x = -\frac{a + b + c}{3}$$

et les deux autres racines sont données par les deux équations du second degré :

$$3x^2 + 2x(a + b + c) + 2ab + 2ac + 2bc - a^2 - b^2 - c^2 = 0,$$
$$3x^2 + 2x(a + b + c) + 6ab + 6ac + 6bc - 5a^2 - 5b^2 - 5c^2 = 0.$$

On peut encore remarquer que ces deux équations ont toujours leurs racines réelles donc les trois équations proposées ont toujours leurs trois racines réelles.

2° On a

(4) $(\alpha+b)(\alpha+\gamma)(b+\gamma)+\alpha\beta\gamma \equiv (\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma).$

Si, dans le premier nombre de cette identité, on fait successivement les trois substitutions :

$$\begin{cases} \alpha = x + a \\ \beta = x + b \\ \gamma = x + c \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = x + b + c - a \\ \beta = x + a + c - b \\ \gamma = x + a + b - c \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = x + 3a - b - c \\ \beta = x + 3b - a - c \\ \gamma = x + 3c - a - b \end{cases}$$

On obtient les premiers membres des proposées; le second membre de (4) les décompose en facteurs et permet, ainsi, la résolution. D'autres substitutions donneraient d'autres équations du même genre.

Remarque. — Les équations proposées rentrent encore dans l'équation :

(5) $(x+p)(x+q)(x+r)+(\alpha x+p')(\alpha x+q')(\alpha x+r') = 0,$

ou

(6) $$p + p' = q + q' = r + r'.$$

Dans ce cas, cette équation admet toujours la racine :

$$x = -\frac{p + p'}{\alpha + 1} = -\frac{q + q'}{\alpha + 1} = -\frac{r + r'}{\alpha + 1}$$

On constate aisément, en substituant à x sa valeur, que le premier membre s'annule. Le quotient du premier membre par $(\alpha + 1)x + p + p'$ est un polynôme du deuxième degré en x qui, égalé à zéro, fournit les deux autres racines.

Si l'on substitue à α, p, p', q, q', r, r', des quantités quelconques, convenablement choisies pour satisfaire aux conditions (6), on pourra former autant d'équations qu'on voudra, du genre des proposées. Ici, pour les trois équations on peut prendre $\alpha = 2$

et $p + p' = q + q' = r + r' = a + b + c$

pour (1) $p' = b + c$ $p = a,$ etc...

pour (2) $p' = 2a$ $p = b + c - a.$ etc.

pour (3) $p' = 2b + 2c - 2a$ $p = 3a - b - c.$ etc.

EXERCICES

1 (*). — Résoudre l'équation

$$\sqrt{a - x} + \sqrt{b - x} + \sqrt{c - x} = \sqrt{a + b + c - x}.$$

2. — Soient A, B, C trois points situés sur une droite Δ. Sur chacune des droites AB, AC, on décrit un demi-cercle. Une droite mobile, perpendiculaire à Δ, rencontre ces demi-cercles aux points B′, C′. Trouver le lieu décrit par le point de concours des droites BB′, CC′.

3. — Par un point fixe P, pris sur la circonférence d'un cercle donné, on trace deux cordes mobiles PA, PB, telles que la somme de leurs carrés soit constante.

Trouver le lieu décrit par le milieu de AB.

4. — Si le triangle podaire A′B′C′ d'un point K, par rapport à un triangle ABC, a pour centre de gravité ce point K; les côtés A′B′C′ sont perpendiculaires sur les médianes de ABC (**).

QUESTIONS PROPOSÉES

348. — Dans un triangle, la distance d du centre de gravité au point de Lemoine, vérifie l'égalité

$$9d^2(\Sigma a^2)^2 = - \Sigma a^6 + 3\Sigma a^4 b^2 - 15 a^2 b^2 c^2.$$

(Aug. Poulain.)

(*) Ces exercices sont extraits des *Examination papers* de l'Université royale d'Irlande, pour l'année 1888. Dans ce volume, dont je dois la connaissance à l'obligeance de M. Casey, se trouvent recueillies toutes les questions posées aux examens des diverses facultés (lettres, sciences, droit, médecine), de Dublin.

(**) On sait que le point de Lemoine jouit de la propriété énoncée. Il faut dans la question présente, démontrer qu'il n'existe aucun autre point, jouissant de cette propriété.

349. *Généralisation de la question 288* (*). — On considère un triangle quelconque ABC, le centre I du cercle inscrit et le point M symétrique de A. relativement au milieu de BC. Par M, on trace MD perpendiculaire à BC et ME, MF faisant, avec BC, deux angles égaux à l'angle A, l'un de même sens que l'angle de AB avec AC, l'autre de même sens que l'angle de AC avec AB. Ces trois droites rencontrent respectivement IA, IB, IC en A', B', C'. Démontrer que

$$MA' = a \operatorname{tg} \frac{A}{2}, \qquad MB' = b, \; MC' = c.$$

On fera voir aussi que si E', F' sont les rencontres de ME et MF avec IA, on a la relation

$$\frac{1}{ME'} + \frac{1}{ME'} = \frac{\operatorname{cotg} \frac{A}{2}}{R};$$

où R est le rayon du cercle circonscrit à ABC, et où ME' et MF' doivent être affectés de signes selon le sens de AI où tombent E' et F'. *(Bernès.)*

350. — Un système de deux droites parallèles AB, CD, est coupé par deux sécantes AC, BD. On joint B et D à un point quelconque E de AC. 1° Si, par A et C, on mène des parallèles respectivement à ED, EB, ces parallèles se coupent sur BD; 2° si par A et C, on mène des parallèles à EB, ED, quel est le lieu de leur rencontre? *(Bernès.)*

(*) Voyez *Journal*, 1883, p. 236.

Le Directeur-gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 28124-11-9.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE

Pages.

Arithmétique et Algèbre.

Démonstration d'un théorème d'arithmétique. . . 98
Recherches sur les caractères de divisibilité par 7, 9, 11, 13, 37, 73, 101, 137 107
Caractère de divisibilité d'un nombre par un nombre premier, par M. *Loir*. 121
Sur la construction d'une table des nombres premiers, par M. *Loir* . . . 146
Sur les égalités à deux degrés, par M. *G. de Longchamps*. 171, 195
Sur les maximums et les minimums, par M. l'abbé *Ropert* 265

Géométrie.

Une démonstration de la propriété fondamentale de l'ellipse, par M. *Em. Lemoine* 3
Essai sur la géométrie de la règle et de l'équerre, par M. *G. de Longchamps* (suite et fin), 5, 25, 52, 78, 110, 129, 155, 183, 202, 222, 248 270
Théorèmes généraux sur les polygones, par M. *Em. Vigarié*. 49
Géométrie du triangle (angles et distances) 73
Note sur le problème du Myosotis, par M. *d'Ocagne*. 97
Sur les centres isodynamiques et sur les centres isogones, par M. *A. Boutin* 99, 123, 152, 180, 198, 242
Les projections polyédriques, par M. *Porchon* . . .107, 126
Distance de deux points en coordonnées barycentriques, par M. *Plamenevsky* 150
Démonstration élémentaire du théorème de Pagès, par M. *E. Pomey* 169
Propriétés du triangle rectangle, par M. *A Benezech* 193, 241
Sur un problème classique, par M. *Tarry* 217
Les coordonnées sous-trilinéaires, par M. *Poulain*, 245 267

Trigonométrie.

Démonstration élémentaire de l'inégalité: $x - \sin x < \frac{x^3}{6}$ par M. *Desmons*. 145

Baccalauréat ès sciences complet.

Amiens et Lille (juillet 1887) 18, 41
Paris (avril 1888) 67
Paris (juillet 1888) 68
Poitiers (juillet 1888) . . . 69
Montpellier et Rennes (avril 1888) 87
Paris (octobre 1888). . . . 138
Paris (avril 1889) 235

Baccalauréat de l'enseignement spécial.

Marseille (novembre 1889). 284

Pages.

Concours divers.

Concours général de philosophie 1888, solution par M. *Gaston Niewenglowski*. 57
École forestière (concours de 1888) 88
Institut agronomique (première et deuxième session 1888) 89
École spéciale militaire 1889; énoncé de la composition mathématique. 162
Id. Solution de la question de Géométrie descriptive par M. *E. Lebon* 184
Concours général de l'enseignement spécial en 1889 (énoncé) 190
École spéciale militaire, solution de la question de géométrie descriptive en 1887 et en 1888, par M. *E. Lebon* 207, 229
École navale (énoncé de la composition de 1889) . . 215
Admission à l'école normale de Cluny. 285

Mélanges et correspondance.

Sur la mesure de la simplicité dans les tracés géométriques, par *E. Lemoine* 10, 33
La détermination des images des objets dans les milieux réfringents, par M. *Svéchnicoff*. 173
Crelle ou Brocard, par M. *A. Morel* 251
Lettre de M. *Lemoine* sur la dénomination des points de Brocard 17
Lettre de M. *Tarry*, exposant la généralisation d un théorème de M. Thiry 38
Lettre de M. *Mosnat* professeur au lycée de Toulon, faisant connaître une démonstration de la propriété fondamentale de la tangente à l'ellipse. . . . .
Extrait d'une lettre de M. *Tarry* relative à la construction du point de Steiner. 134
Extrait d'une lettre de M. *Boutin* à propos de la formule donnant la distance de deux points 211
Lettre de M. *Neuberg* sur le théorème de Pagès, les centres isodynamiques, le triangle podaire du centre de gravité 211
Lettre de M. *Mosnat* sur le théorème de Pagès . . . 214
Lettre de M. *Lemoine* sur le théorème de Pagès . . . 257
Lettre de M. *Neuberg* relative à l'article *Crelle* ou *Brocard* 281
Lettres de M. *Bernès*, sur les formules de M. Plamenewsky 281

Bibliographie.

A Sequel to Euclid by *John Casey*. — compte-rendu de M. *Em. Vigarié* . . . 90
Nouvelles Annales scientifiques 92
Mathématiques et Mathématiciens, par M. *A. Rebière*. 92
Arpentage, levé de plans, etc., par *F. J.* — Compte-rendu par *G. L.* 114
Nouvelle Table des logarithmes, etc. 163
Sur une nouvelle méthode de résolution des équations linéaires, etc., par M. *Clasen*. — Compte-rendu par *G. L.* 188
Trigonométrie rectiligne, par M. *Lalbalétrier*. — Compte-rendu par *G. L.* 189
Companion to the Weekly problem Papers by *John Milne*. — Compte-rendu par M. *E. Vigarié*. . . . 233

Pages.

Questions diverses.

Exercices divers, par M. *Boutin*, 14, 39, 62, 82, 132, 159, 205, 226, 277
Questions d'examens, 66. 85, 117, 135, 161, 255.
Note sur la question 169, par M. *Vigarié* 115
Note sur la question 261, par M. *d'Ocagne*. 116
Exercices (Extraits de l'*Examination papers* de l'Université de Dublin). . . . 287

Pages.

Questions proposées.

304 à 350.

Questions résolues.

258, 263, 264, 268, 267, 269, 270, 272, 271, 274, 275, 261, 305, 280, 281, 276, 285, 286, 273, 274, 277, 288, 291, 292, 295, 282, 290, 293

TABLE ALPHABÉTIQUE DES NOMS D'AUTEURS

Baudran, *élève au lycée de Rouen*, 71, 94, 142, 166, 191, 237.
Bénézech (L.), 117, 193, 241.
Bernès, *professeur au lycée Louis le-Grand*, 281, 288.
Beyens (J.), *capitaine du Génie à Cadix*, 19, 20, 22, 23, 71, 93, 94, 117, 167, 238, 239, 263.
Biermann, *ancien élève à l'Ecole polytechnique*, 43.
Borel (Em.), *élève au lycée Louis-le-Grand*, 70, 71, 141, 190.
Boutin (A.), 14, 22, 23, 39, 44, 47, 62, 69, 71, 73, 82, 94, 99, 123, 152, 159, 167, 180, 198, 206, 211, 212, 213, 226, 238, 242, 259, 263, 277, 285.
Bohn, *maître répétiteur au collège de Verdun*, 215.
Brocard, *commandant du Génie à Grenoble*, 251.
Casey (J.), *professeur à l'Université de Dublin*, 90, 234, 252, 287.
Catalan (E.), *professeur émérite à l'Université de Liège*, 20, 22, 71, 93, 96, 143, 169, 258, 263, 276.
Cay (M'), 213.
Cesáro, *professeur à l'Université de Palerme*, 213.
Chapron, 19.
Chatenet (H.), *élève au lycée de Limoges*, 239.
Clasen, *chanoine de la cathédrale de Luxembourg*, 188.
Combette, *inspecteur de l'Académie de Paris*, 265.
Couvert (Al.), *élève au lycée Condorcet*, 47, 71, 94, 142, 143, 191. 239.
Davis, 233.
Dellac, *professeur au lycée de Marseille*, 216, 263.
Desmons, *professeur au lycée Janson de Sailly*, 145.
Elliot, 233.
Emmerich, *professeur à Mülheim-sur-Ruhr* (Prusse), 238, 239, 253, 263.
Frolow (Le général), 171, 173.
Fuhrmann, 253.
Galban, *élève à l'Ecole polytechnique de Madrid*, 46, 142, 143. 191.
Galopeau (H.), *étudiant à Bordeaux*, 20, 22, 47, 94, 237.
Gelin (L'abbé), *professeur au collège Saint-Quirin* (à Huy, Belgique), 22, 43, 71.

Genèse, 233.
Gob, 24, 214, 240.
Hadamard, *agrégé de l'Université*, 213.
Hement, 249, 251.
Himel, *à Alger*, 71.
Laurens, *professeur honoraire*, 276.
Lavieuville, *professeur au collège de Dieppe*, 24, 43, 71, 94, 120, 238, 239, 263.
Lebon (E.), *professeur au lycée Charlemagne*, 187.
Le Goff, *à Lesneven*, 191, 238.
Lemoine, *ancien élève de l'Ecole Polytechnique*, 3, 10, 17, 24, 33, 39, 93, 246, 252, 257, 284.
Loir, *doyen honoraire de la Faculté des sciences de Lyon*, 121, 146
Longchamps (G. de), 5, 18, 25, 47, 48, 52, 78, 95, 110, 114, 129, 155, 163, 168, 171, 183, 190, 191, 192, 195, 202, 222, 238, 248, 252, 258, 261, 264, 265, 270, 285.
Lucas (Ed.), *professeur de mathématiques spéciales au lgcée Saint-Louis*, 168.
Mannheim *professeur à l'Ecole Polytechnique*, 70, 94, 141, 143.
Mansion (P.), *professeur à l'Université de Gand*, 91.
Mayon, *professeur au collège de Blois*, 239.
Milne (J.), 233.
Mineur, *élève au lycée de Dijon*, 22, 71.
Morel (A.), *professeur à l'école Lavoisier*, 255, 281.
Mosnat, *professeur au lycée de Toulon*, 39, 214.
Moureau, *élève au lycée Henri IV*, 168.
Neuberg (J.), *professeur à l'Université de Liège*, 24, 72, 91, 95, 96, 119, 211, 216, 234, 240, 253, 260, 261, 268, 281.
Niewenglowski (G.), *élève au lycée Louis-le-Grand*, 57.
Nils Ekholm, 223.
Ocagne (M. d'), *ingénieur des Ponts et Chaussées à Pontoise*, 48, 72, 92, 97, 116, 119, 120, 144, 236.
Olivier (G.), *à Montauban*, 71.
Porchon, *professeur au lycée de Versailles*, 102.
Poulain, 17, 245, 267, 287.
Plamenewsky, *maître à l école réale de Femir-Khan-Choura*, 150, 281.
Pomey (E.), 169, 257.
Reboul (L'abbé), *licencié ès sciences math.*, 23.
Rindi (S.), 96.
Ropert (L'abbé), *professeur au petit séminaire de Guérande*, 265.
Russo (G.), 21, 23.
Schlömilch, 251.
Scott (Miss), 18, 253.
Simmons, 212, 233, 234.
Sollertinsky, *professeur à Gatschina*, 167.
Svéchnicoff, *professeur au gymnase du Troitzk*, 173, 263, 264.
Studler, *chargé de cours au lycée de Rodez*, 238, 239, 261.
Tarry, 38, 134, 167, 217, 234.
Taylor (Ch.), 170.
Thiry, 38, 215.
Vazou, 120.
Vigarié (Em.), 23, 49, 92, 115, 120, 237, 252.
Youssoufian, *professeur de mathématiques à l'école Milkié à Constantinople*, 238, 239, 263.
Ziegel (F.), *élève au lycée Condorcet, institution Springer*, 239.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX,
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 28124-11-9.

